# Contrôle continu 1

---

*La clarté de la rédaction sera prise en compte. Les réponses aux exercices doivent être justifiées.*

**Exercice 1:**

Calculer toutes les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition :

$$\begin{array}{rcccc} a & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x\sin(x) \\ c & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{\sin^3(x)}{\cos^8(x)} \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} b & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x^2+2x+3} \\ d & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{x^3-1}{(x^2+1)^2} \end{array}$$

**Solution :**

1. Tout d'abord, la fonction $a$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions usuelles. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ et est intégrable sur tout intervalle compact. D'après le théorème fondamental de l'analyse, une primitive de $a$ est donné par la fonction :

$$\begin{array}{rcccc} A & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \int_0^x a(y)dy \end{array}$$

Posons $\begin{array}{rcccc} u & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$ et $\begin{array}{rcccc} v & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & -\cos(x) \end{array}$ de sorte que $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = \sin(x)$. Par la formule d'intégration par parties, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^x u(y)v'(y)dy \\ &= [u(y)v(y)]_0^x + \int_0^x u'(y)v(y)dy \\ &= -x\cos(x) + \int_0^x \cos(y)dy \\ &= -x\cos(x) + [\sin(y)]_0^x \\ &= -x\cos(x) + \sin(x). \end{aligned}$$

Maintenant, soit $F$ une primitive quelconque de $a$ alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F = A + C$.

2. Nous commençons par remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geqslant 2 > 0$ de sorte que $b$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ par composition. $b$ admet donc des primitives définies sur $\mathbb{R}$ et comme précédemment, une primitive est donnée par :

$$B : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x b(y)dy \end{array}$$

Considérons la fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{argsh}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}$. Alors $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, par composition, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$ ce qui montre en particulier que la fonction $\varphi$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Posons $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cosh^2(x) \end{array}$.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl}
b(x) & = & \sqrt{x^2+2x+3} \\
& = & \sqrt{(x+1)^2+2} \\
& = & \sqrt{2}\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \\
& = & \sqrt{2}\dfrac{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}} \\
& = & 2\left(\left(\sinh\left(\operatorname{argsh}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)^2+1\right)\operatorname{argsh}'\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right) \\
& = & 2\cosh^2\left(\operatorname{argsh}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right)\operatorname{argsh}'\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right) \\
& = & 2f(\varphi(x))\varphi'(x).
\end{array}$$

Par la formule de changement de variable ainsi que par les formules de trigonométrie hyperbolique, nous en déduisons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} B(x) &= \int_0^x 2f(\varphi(y))\varphi'(y)dy \\ &= 2\int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} f(u)du \\ &= 2\int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \cosh^2(u)du \\ &= 2\int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{\cosh(2u)+1}{2}du \\ &= \left[\frac{\sinh(2u)}{2}+u\right]_{\varphi(0)}^{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Comme $\varphi(0) = \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\varphi(x) = \operatorname{argsh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} B(x) &= \sinh\left(2\operatorname{argsh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \sinh\left(2\operatorname{argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) + \operatorname{argsh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2\sinh\left(\operatorname{argsh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right)\cosh\left(\operatorname{argsh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &\quad -2\sinh\left(\operatorname{argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\cosh\left(\operatorname{argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &\quad +\operatorname{argsh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} - 2\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \operatorname{argsh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Soit $F$ une primitive quelconque de $B$ alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F = B + C$.

3. La fonction cos s'annule sur $O = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. Par quotient, la fonction $c$ est donc bien définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus O$. Elle admet donc des primitives sur cet ensemble et est intégrable sur tout intervalle compact inclus dans celui-ci. Nous allons utiliser le théorème fondamental de l'analyse sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ce qui nous donne une primitive $C$ sur cet intervalle définie par :

$$C : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x c(y)dy \end{array}$$

Posons $\varphi : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$ une fonction bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ telle que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi'(x) = -\sin(x)$. Alors, en utilisant que $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et la formule de changement de variable, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
C(x) &= \int_0^x \frac{\sin^3(y)}{\cos^8(y)} dy \\
&= \int_0^x \frac{\sin(y)(1-\cos^2(y))}{\cos^8(y)} dy \\
&= \int_0^x \frac{\sin(y)}{\cos^8(y)} - \frac{\sin(y)}{\cos^6(y)} dy \\
&= \int_0^x -\frac{\varphi'(y)}{\varphi^8(y)} dy + \int_0^x \frac{\varphi'(y)}{\varphi^6(y)} dy \\
&= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} -\frac{1}{u^8} du + \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{1}{u^6} du \\
&= \left[\frac{1}{7u^7}\right]_1^{\cos(x)} + \left[-\frac{1}{5u^5}\right]_1^{\cos(x)} \\
&= \frac{1}{7\cos^7(x)} - \frac{1}{7} - \frac{1}{5\cos^5(x)} + \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Soit $F : \mathbb{R} \setminus O \to \mathbb{R}$ une primitive quelconque de $c$ sur $\mathbb{R} \setminus O$ alors il existe une fonction $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$, $F(x) = C(x) + \gamma(k)$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ de sorte que $d$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ par quotient. Comme précédemment, une primitive de $d$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par :

$$\begin{array}{rccc}
D & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\
 & & x & \mapsto & \int_0^x d(y)dy.
\end{array}$$

D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - 1}{(x^2+1)^2} &= \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(ax+b)(x^2+1) + cx + d}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{ax^3 + bx^2 + (c+a)x + b + d}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Par identification, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c + a = 0 \\ b + d = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -1 \\ d = -1 \end{cases}.$$

Nous avons donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{x}{x^2+1} - \frac{x+1}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} D(x) &= \int_0^x \frac{1}{2}\frac{2y}{y^2+1} - \frac{1}{2}\frac{2y}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{(y^2+1)^2} dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(y^2+1\right)\right]_0^x - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{y^2+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{(y^2+1)^2} dy \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} - 1\right) - \int_0^x \frac{1}{(y^2+1)^2} dy. \end{aligned}$$

Il nous reste à calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{(y^2+1)^2} dy &= \int_0^x \frac{1+y^2-y^2}{(y^2+1)^2} dy \\ &= \int_0^x \frac{1}{y^2+1} dy - \int_0^x \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy \\ &= [\arctan(y)]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2y^2}{(y^2+1)^2} dy \\ &= \arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2y^2}{(y^2+1)^2} dy. \end{aligned}$$

Posons maintenant $\begin{array}{cccc} u & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & y \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} v & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & -\frac{1}{y^2+1} \end{array}$ de sorte que $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $u'(y) = 1$, $v'(y) = \frac{2y}{(y^2+1)^2}$. Par la formule d'intégration par parties, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{2y^2}{(y^2+1)^2} dy &= \int_0^x u(y)v'(y) dy \\ &= [u(y)v(y)]_0^x - \int_0^x u'(y)v(y) dy \\ &= -\frac{x}{x^2+1} + \int_0^x \frac{1}{y^2+1} dy \\ &= -\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x). \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{(y^2+1)^2}dy &= \arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2y^2}{(y^2+1)^2}dy \\ &= \arctan(x) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x)\right) \\ &= \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{x}{2(x^2+1)}.\end{aligned}$$

Au final, il vient :

$$\begin{aligned}D(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} - 1\right) - \left(\frac{\arctan(x)}{2} + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+1) + \frac{1-x}{x^2+1} - \arctan(x) - 1\right).\end{aligned}$$

Soit $F$ une primitive quelconque de $d$ alors il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $F = D + C$.

**Exercice 2:**

Déterminer la limite des sommes suivantes lorsque $n$ tend vers $+\infty$ en les identifiant à des sommes de Riemann :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{(k-2n)(k^2+n^2)} \qquad \tilde{S}_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k^2}.$$

**Solution :**

1. Posons $\begin{array}{rccc} f & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{(x-2)(x^2+1)} \end{array}$ qui est bien définie et continue sur $[0,1]$ par quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur est non nul sur $[0,1]$. Par conséquent, $f$ est intégrable sur $[0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, posons $x_i = \frac{i}{n}$ et pour tout $j \in [\![0,n-1]\!]$, posons $\xi_j = \frac{j}{n}$. Introduisons la subdivision pointée $D_n = \{([x_i, x_{i+1}], \xi_i)\}_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ de $[0,1]$ de pas constant

$\delta_n = \frac{1}{n}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous calculons :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{(k-2n)(k^2+n^2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{n^3\left(\frac{k}{n}-2\right)\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}-2\right)\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) f\left(\xi_k\right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous reconnaissons que $S_n$ est la somme de Riemann de $f$ associée à la subdivision pointée $D_n$. Comme $f$ est intégrable sur $[0,1]$, un résultat du cours indique que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx$. Par ailleurs, d'après le théorème de décomposition en éléments simples, on sait qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [0,1]$ :

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+1}. \tag{0.1}$$

En multipliant par $x-2$, il vient :

$$\frac{1}{x^2+1} = a + \frac{(x-2)(bx+c)}{x^2+1}.$$

En évaluant en $x = 2$, il vient $a = \frac{1}{5}$. En multipliant (**??**) par $x$ et faisant tendre $x$ vers $+\infty$, nous obtenons $b = -\frac{1}{5}$ puis en évaluant (**??**) en $x = 0$ par exemple, il vient $c = -\frac{2}{5}$ ce qui nous donne, pour tout $x \in [0,1]$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}\right). \end{aligned}$$

En utilisant les primitives usuelles, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \frac{1}{5}\left([\ln(|x-2|)]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 - 2\left[\arctan(x)\right]_0^1\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(-\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(2) - 2\arctan(1)\right) \\
&= -\frac{3}{10}\ln(2) - \frac{2}{5}\frac{\pi}{4} \\
&= -\frac{3}{10}\ln(2) - \frac{\pi}{10}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\frac{3}{10}\ln(2) - \frac{\pi}{10}.$$

2. Soit $\begin{array}{cccc} f & : & [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{x^2} \end{array}$ une fonction bien définie et continue donc intégrable sur $[1,2]$. Avec les mêmes notations que ci-dessus mais changeant,pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[\![0,n]\!]$ par $[\![n,2n-1]\!]$, la subdivision pointée est, , $D_n = \{([x_i, x_{i+1}], \xi_i)\}_{i\in[\![n,2n-1]\!]}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k^2} \\
&= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n}\frac{1}{\frac{k^2}{n^2}} \\
&= \sum_{k=n}^{2n-1} (x_{k+1}-x_k) f\left(\frac{k}{n}\right).
\end{aligned}$$

Comme précédemment, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_1^2 f(x)dx.$$

Or $\int_1^2 f(x)dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$. Nous en déduisons que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

**Exercice 3:**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ et $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision de $[a,b]$. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note $m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$ et $M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$. On définit alors la somme de Darboux inférieure $s_u(f)$ de $f$ par :

$$s_u(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i).$$

De la même manière, on définit la somme de Darboux supérieure $S_u(f)$ de $f$ par :

$$S_u(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Rappelons que le diamètre de la subdivision $u$ est défini par $\delta(u) = \sup_{i\in[\![0,n-1]\!]} |x_{i+1} - x_i|$. De plus, notons $\mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a,b]$. Notons également $\mathcal{E}_f^+ = \{\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) | f \leqslant \varphi\}$ et $\mathcal{E}_f^- = \{\psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) | \psi \leqslant f\}$. L'intégrale inférieure de $f$ est alors ${}_*\int_a^b f = \sup\{\int_a^b \psi(x)dx | \psi \in \mathcal{E}_f^-\}$ alors que l'intégrale supérieure de $f$ est ${}^*\int_a^b f = \inf\{\int_a^b \varphi(x)dx | \varphi \in \mathcal{E}_f^+\}$. On supposera que ces quantités sont bien définies.

(1) Soit $u$ une subdivision de $[a,b]$. Montrer que $s_u(f) \leqslant {}_*\int_a^b f$.

**Solution :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \in [a,b]$ tels que, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $x_j < x_{j+1}$ et $x_0 = a$, $x_n = b$ de sorte que $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$. Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $x \in ]x_j, x_{j+1}[$, on pose $\varphi(x) = m_j$ et pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on pose $\varphi(x_i) = f(x_i)$. Alors, par définition, $\varphi$ est en escalier. De plus, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $x \in ]x_j, x_{j+1}[$, $\varphi(x) = m_j = \inf_{y\in[x_j,x_{j+1}]} f(y) \leqslant f(x)$. Nous en déduisons que $\varphi \in \mathcal{E}_f^-$. De plus, par définition, nous avons :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} m_j(x_{j+1} - x_j) = s_u(f).$$

Par définition de ${}_*\int_a^b f$, nous voyons que $s_u(f) = \int_a^b \varphi(x)dx \leqslant {}_*\int_a^b f$.

(2) Soient $u, v$ des subdivisions de $[a,b]$ telles que $v$ est plus fine que $u$. Montrer que $s_u(f) \leqslant s_v(f)$.

**Solution :**

On écrit les subdivisions $u$ et $v$ tels que $u = \{x_i \in [a,b] | i \in [\![0,n]\!]\}$ et $v = \{y_j \in [a,b] | j \in [\![0,m]\!]\}$ avec $u \subset v$ donc $m \geqslant n$. On peut supposer que $m > n$ sinon le résultat est direct. On note $y_{j_1}, \cdots, y_{j_{m-n}} \in v \setminus u$ tels que $y_{j_1} < \cdots < y_{j_{m-n}}$. Nous allons montrer par récurrence finie que $s_u(f) \leqslant s_v(f)$.

1. Posons $v_1 = u \cup \{y_{j_1}\}$. Alors, il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $y_{j_1} \in ]x_i, x_{i+1}[$. Notons $m_{j_1,i} = \inf\limits_{x \in [x_i, y_{j_1}]} f(x)$ et $m_{j_1,i+1} = \inf\limits_{x \in [y_{j_1}, x_{i+1}]} f(x)$. Pour tout $x \in ]x_i, y_{j_1}[ \subset ]x_i, x_{i+1}[$, nous avons $m_i \leqslant f(x)$ de sorte que $m_i$ est un minorant de $\{f(x) \in \mathbb{R} | x \in ]x_i, y_{j_1}[\}$ d'où $m_i \leqslant m_{j_1,i}$. De la même manière, nous avons $m_i \leqslant m_{j_1,i+1}$. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
s_u(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \\
&= \sum_{k=0}^{i-1} m_k(x_{k+1} - x_k) + m_i(x_{i+1} - x_i) + \sum_{k=i+1}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \\
&= \sum_{k=0}^{i-1} m_k(x_{k+1} - x_k) + m_i(x_{i+1} - y_{j_1} + y_{j_1} - x_i) + \sum_{k=i+1}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \\
&= \sum_{k=0}^{i-1} m_k(x_{k+1} - x_k) + m_i(x_{i+1} - y_{j_1}) + m_i(y_{j_1} - x_i) + \sum_{k=i+1}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{i-1} m_k(x_{k+1} - x_k) + m_{j_1,i}(x_{i+1} - y_{j_1}) + m_{j_1,i+1}(y_{j_1} - x_i) + \sum_{k=i+1}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \\
&= s_{v_1}(f).
\end{aligned}$$

   Nous avons donc montré que $s_u(f) \leqslant s_{v_1}(f)$.

2. Supposons que pour un certain $k \in [\![1, m-n-1]\!]$ et $v_k = u \cup \left( \bigcup\limits_{l=1}^{k} \{y_{j_l}\} \right)$, on ait $s_u(f) \leqslant s_{v_k}(f)$. On pose alors $v_{k+1} = v_k \cup \{y_{j_{k+1}}\}$. Comme dans la première partie, nous avons alors $s_{v_k}(f) \leqslant s_{v_{k+1}}(f)$.

Comme $v = u \cup \left( \bigcup\limits_{l=1}^{m-n} \{y_{j_l}\} \right)$, par récurrence finie, nous en déduisons que $s_u(f) \leqslant s_v(f)$.

(3) Soit $g$ une fonction en escalier sur $[a,b]$ telle que $g \leqslant f$. Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$, $u = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une subdivision quelconque de $[a,b]$ et $v = (y_j)_{j \in [\![0,k]\!]}$ une subdivision adaptée à $g$. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.

a. Supposons qu'il n'existe pas d'indice $j \in [\![0, k]\!]$ tel que $y_j \in [x_i, x_{i+1}]$. Montrer que $\int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(x) - m_i)dx \leqslant 0$.

**Solution :**

Soit $j_i = \sup\{y_j \in [a, b] | y_j \leqslant x_i\}$ où le supremum existe et est atteint puisque nous avons un ensemble fini. Alors, nous avons $y_{j_i} < x_i$ puisqu'il n'existe pas d'indice $j \in [\![0, k]\!]$ tel que $y_j \in [x_i, x_{i+1}]$. Par définition du supremum, nous avons $y_{j_i+1} > x_i$ et donc $y_{j_i+1} > x_{i+1}$ par hypothèse, de sorte que $[x_i, x_{i+1}] \subset ]y_{j_i}, y_{j_i+1}[$. Comme $g$ est en escalier et $v$ est adaptée à $g$, il existe $c_{j_i} \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in ]y_{j_i}, y_{j_i+1}[$, $g(x) = c_{j_i}$. Comme $g \leqslant f$, pour tout $x \in ]y_{j_i}, y_{j_i+1}[$, nous avons $g(x) = c_{j_i} \leqslant f(x)$. En particulier, pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $c_{j_i} \leqslant f(x)$ de sorte que $c_{j_i}$ est un minorant de $\{f(x) \in \mathbb{R} | x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ d'où $c_{j_i} \leqslant \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = m_i$ par définition. Par croissance de l'intégrale, nous en déduisons que :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(x) - m_i)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (c_{j_i} - m_i)dx \leqslant 0.$$

b. Supposons qu'il existe un indice $j \in [\![0, k]\!]$ tel que $y_j \in [x_i, x_{i+1}]$. Montrer que $\int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(x) - m_i)dx \leqslant (M - m)\delta(u)$.

**Solution :**

Par définition de $m$, nous savons que, pour tout $x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x)$ donc, pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $m \leqslant f(x)$ d'où $m$ est un minorant de $\{f(x) \in \mathbb{R} | x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ ce qui entraîne que $m \leqslant m_i$ et donc que $-m_i \leqslant -m$. Par ailleurs, pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant M$ par définition de $M$. Par somme, pour tout $x \in [a, b]$, $(g(x) - m_i) \leqslant (M - m)$. Par ailleurs, par définition, $(x_{i+1} - x_i) \leqslant \delta(u)$. Par croissance de l'intégrale, nous en déduisons que :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(x) - m_i)dx \leqslant (M - m)(x_{i+1} - x_i) \leqslant (M - m)\delta(u)$$

comme souhaité.

c. Soit $I = \{i \in [\![0, n-1]\!] | \exists j \in [\![0, k]\!],\ y_j \in [x_i, x_{i+1}]\}$ tel que $\mathrm{card}(I) \leqslant 2k$. Déduire des questions précédentes que $\int_a^b g(x)dx - s_u(f) \leqslant 2k(M - m)\delta(u)$.

**Solution :**

D'après les questions précédents, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!] \setminus I$, nous avons $\int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(x) - m_i)dx \leqslant 0$ et pour tout $i \in I$, nous avons $\int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(x) - m_i)dx \leqslant$

$(M-m)\delta(u)$. D'après la relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)dx - s_u(f) &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} m_i dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(x)-m_i)dx \\
&= \sum_{i\in[\![0,n-1]\!]\setminus I}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(x)-m_i)dx + \sum_{i\in I}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(x)-m_i)dx \\
&\leqslant \sum_{i\in I}(M-m)\delta(u) \\
&\leqslant \mathrm{card}(I)(M-m)\delta(u) \\
&\leqslant 2k(M-m)\delta(u)
\end{aligned}$$

comme souhaité.

d. Déduire des questions précédente que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout subdivision $u$ de $[a,b]$ de diamètre inférieur à $\delta$, l'on ait $\int_a^b g(x)dx - \epsilon \leqslant s_u(f)$.

**Solution :**

Soit $\epsilon > 0$. Si $M = m$, alors la question précédente montre que $\int_a^b g(x)dx \leqslant s_u(f)$ d'où $\int_a^b g(x)dx - \epsilon \leqslant s_u(f)$. Supposons donc que $M > m$. On pose alors $\delta = \frac{\epsilon}{2k(M-m)}$. Alors pour toute subdivision $u$ telle que $\delta(u) < \delta$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)dx - s_u(f) &\leqslant 2k(M-m)\delta(u) \\
&< 2k(M-m)\delta \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit.

(4) Déduire de la question précédente un autre théorème de Darboux :
**Théorème 0.1.** *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision $u$ de $[a,b]$ de diamètre inférieur à $\delta$, on a $0 \leqslant {}_*\!\int_a^b f - s_u(f) \leqslant \epsilon$.*

**Solution :**

Soit $\epsilon > 0$. Par définition de ${}_*\int_a^b f$, il existe $g \in \mathcal{E}_f^-$ telle que ${}_*\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \int_a^b g(x)dx$ de sorte que ${}_*\int_a^b f - \int_a^b g(x)dx \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ . D'après les questions précédentes, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision $u$ de $[a,b]$ de diamètre inférieur à $\delta$, $\int_a^b g(x)dx - s_u(f) < \frac{\epsilon}{2}$. Nous en déduisons alors que :

$$\begin{aligned} {}_*\int_a^b f - s_u(f) &= {}_*\int_a^b f - \int_a^b g(x)dx + \int_a^b g(x)dx - s_u(f) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la question 1 montre que ${}_*\int_a^b f - s_u(f) \geqslant 0$. Ceci montre bien le résultat souhaité.

(5) On note $d(f) = \sup_u s_u(f)$ où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $u$ de $[a,b]$. Montrer que $d(f) = {}_*\int_a^b f$.

**Solution :**

D'après la question 1, pour tout subdivision $u$ de $[a,b]$, nous avons $s_u(f) \leqslant {}_*\int_a^b f$de sorte que ${}_*\int_a^b f$ est un majorant de $\{s_u(f) | u \text{ subdivision de } [a,b]\}$ et, par défintion du supremum, nous avons $d(f) \leqslant {}_*\int_a^b f$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait qu'il existe $\delta_n > 0$ et une subdivision $u_n$ de pas inférieur à $\delta_n$ telle que ${}_*\int_a^b f - \frac{1}{n} \leqslant s_{u_n}(f) \leqslant d(f)$. D'où, par passage à la limite, il vient que ${}_*\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} {}_*\int_a^b f - \frac{1}{n} \leqslant d(f)$. Au final, nous obtenons bien $d(f) = {}_*\int_a^b f$.