DS, Calcul Diff L3
2 avril 2015, durée 1h00

Aucun document ni calculatrice autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

1. Après division par $t+1$, on obtient une équation différentielle linéaire sous la forme du cours avec coefficients définis sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Le cours nous dit que sur $I =]-\infty, -1[$ (resp. $J =]-1, +\infty[$), pour tout $t_0 \in I$ (resp. $t_0 \in J$), pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ (resp. $C^1(J, \mathbb{R})$) avec $y(t_0) = y_0$.
2. L'équation homogène est $y' = \frac{t}{t+1}y$. Puisque $\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$, une primitive en est
$$t - \ln|t+1| = t - \ln(t+1)$$
sur J. L'ensemble des solutions homogènes est donc
$$S_H = \mathbb{R}\phi \text{ avec } \phi(t) = \frac{e^t}{t+1}.$$
Pour obtenir les solutions de notre équation, on cherche $\lambda \in C^1(I, \mathbb{R})$ telle que $y = \lambda(t)\phi(t)$. On obtient $\lambda'\phi = te^t$, soit $\lambda' = t(t+1)$ et donc
$$\forall t \in J,\ \lambda(t) = t^3/3 + t^2/2 + C$$
avec $C \in \mathbb{R}$. Donc
$$S_E = (\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2})\frac{e^t}{t+1} + \mathbb{R}\phi.$$
3. Si $y(0) = e$, on obtient $e = y(0) = (\frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{3})\frac{e^t}{t+1}(0) + Ce^0$ soit $C = e$. Donc
$$y(t) = (\frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{3} + e)\frac{e^t}{t+1}.$$
4. On a $y = \frac{e^t}{t+1}(t^3/3 + t^2/2 + C)$ donc si on veut une limite en -1^+, il faut que $-1/3 + 1/2 + C = 0$ soit $C = -1/6$, soit
$$y = e^t(t^2/3 + t/6 - 1/6)$$
qui a bien une limite. Cette fonction est solution sur I de la même façon, et donc sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
5. Si y est C^1 au voisinage de -1, on a $0 = -y(-1) + 0$, donc $y(-1) = 0 \neq e$, donc le problème n'a pas de solution.

Exercice 2

1. Le polynôme caractéristique du système associé est $r^2+4r+13$ et a pour racines $-2\pm 3i$. Donc les solutions sont sous la forme

$$y = Ae^{-2t}\cos 3t + Be^{-2t}\sin(3t).$$

Les conditions initiales donnent $A = \alpha_1$ et $-2A+3B = \alpha_2$, soit $B = (\alpha_2+2\alpha_1)/3$, donc

$$y(t) = \alpha_1 e^{-2t}\cos 3t + \frac{2\alpha_1+\alpha_2}{3}e^{-2t}\sin(3t).$$

2. Si $Z = (y, y')$, on a

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -13 & -4 \end{pmatrix} Z.$$

3. Si $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0)$, la solution est $y = e^{-2t}\big(\cos(3t) + 2/3\sin(3t)\big)$ et donc

$$\begin{aligned} y' &= e^{-2t}\big(-2\cos 3t - 4/3\sin 3t - 3\sin(3t) + 2\cos(3t)\big) \\ &= e^{-2t}(-13/3\sin 3t) \end{aligned}$$

Si $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 1)$, on a $y = 1/3e^{-2t}\sin 3t$ et donc $y' = 1/3e^{-2t}(-2\sin 3t + 3\cos 3t)$. Or e^{tA} est la résolvante R_0^t, donc

$$e^{tA} = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos(3t) + 2/3\sin(3t) & 1/3\sin 3t \\ -13/3\sin 3t & 1/3(-2\sin 3t + 3\cos 3t) \end{pmatrix}.$$

On remarque que $e^{0A} = I_2$.

4.

On cherche une solution particulière de la forme

$$y = a\cos(3t) + b\sin(3t).$$

On trouve

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 13y &= (-9a\cos 3t - 9b\sin 3t) + 4(-3a\sin 3t + 3b\cos 3t) + 13a\cos 3t + 13b\sin 3t \\ &= (-9a + 12b + 13a)\cos 3t + (-9b - 12a + 13b)\sin 3t, \end{aligned}$$

soit $4a + 12b = 1$ et $-12a + 4b = 0$. Donc $b = 3a$ et $a = 1/40$, soit $b = 3/40$. Au total,

$$S_E = \frac{1}{40}(\cos 3t + 3\sin 3t) + S_H.$$