Spectral projection for barrier-top resonances and applications

Thierry Ramond
LMO, Université Paris Sud 11

d'après un travail avec J.-F. Bony (Université Bordeaux 1),
S. Fujiié (Hyogo University) et M. Zerzeri (Université Paris 13)

Luminy, 19/01/2009.

Plan de l'exposé

Hypothèses

- On considère l'opérateur de Schrödinger semiclassique sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$,

$$P(x, hD) = -h^2\Delta + V(x)$$

sous les hypothèses suivantes :

(H) $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s'étend en une fonction holomorphe dans

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{C};\ |\operatorname{Im} x| \leq \delta\langle x\rangle\}.$$

(D) Pour un $\rho > 1$, $V(x) = \mathcal{O}(\langle x\rangle^{-\rho})$, quand $|x| \to \infty$, $x \in \mathcal{S}$.

(M) $V(x) = E_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j^2}{4} x_j^2 + O(x^3)$, $E_0 > 0$ avec $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

(TS) L'ensemble capté à énergie E_0 est $K(E_0) = \{(0,0)\}$.

- V admet alors un unique maximum global en $x = 0$, et p est de type principal hors de $(0,0)$ dans $p^{-1}(E_0)$.
- P est auto-adjoint de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$.

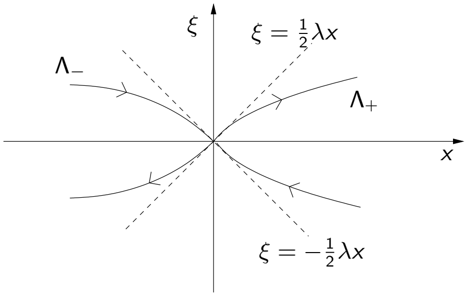
Géométrie au point critique

- On a $d_{(0,0)}H_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) & 0 \end{pmatrix}$ avec pour valeurs propres les $\pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_n$.

- Par le théorème des variétés stable/instable, il existe deux variétés lagrangiennes

$$\Lambda_\pm : \xi = \nabla\phi_\pm(x) = \pm\frac{1}{2}\lambda \cdot x + O(x^2) \text{ près de } (0,0),$$

stables sous le flot de H_p.



Définition des résonances

- On définit les résonances de P par distortion analytique :
  - Soit $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que, pour $R_0 < R_1$,

$$F(x) = 0 \text{ si } |x| \leq R_0 \text{ et } F(x) = x \text{ si } |x| \geq R_1.$$

    Pour $\mu \in \mathbb{R}$, on définit $U_\mu : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$U_\mu \phi(x) = |\det(1 + \mu dF(x))|^{1/2} \varphi(x + \mu F(x))$$

    Alors $U_\mu P(U_\mu)^{-1}$ est un opérateur différentiel à coefficients analytiques en μ, qui peut s'étendre à des μ complexes assez petits (dépendant de δ).
  - On pose $P_\theta = U_{i\theta} P(U_{i\theta})^{-1}$. Le spectre de P_θ est discret dans

$$\mathcal{S}_\theta = \{z \in \mathbb{C};\ -2\theta < \arg z \leq 0\}.$$

    De plus si $\theta' > \theta$, $\sigma_{disc}(P_{\theta'}) \cap \mathcal{S}_\theta = \sigma_{disc}(P_\theta) \cap \mathcal{S}_\theta$.
  - Les résonances de P sont les éléments de $\Gamma(h) = \sigma(P_\theta) \cap \mathcal{S}_\theta$.

Le projecteur spectral

- Si $z \in \Gamma(h)$ on note $\Pi_{\theta,z} = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (P_\theta - \zeta)^{-1} d\zeta$ le projecteur spectral associé à la résonance z, où γ est un cercle de centre z ne contenant pas d'autre résonance.
- La multiplicité d'une résonance z est définie comme le rang de $\Pi_{\theta,z}$.
- Pour une résonance simple on a $\Pi_{\theta,z} = (\,\cdot\,, v_\theta)w_\theta$, et la relation $J\Pi^*_{\theta,z}J = \Pi_{\theta,z}$ entraine qu'on peut écrire, pour un $f_\theta \in L^2$,

$$\Pi_{\theta,z} = (\,\cdot\,, \overline{f_\theta})f_\theta.$$

- Nos résultats concernent $\Pi_{\theta,z}$ comme opérateur de L^2_{comp} dans L^2_{loc}, i.e l'opérateur $\chi\Pi_{\theta,z}\chi$ où $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On peut supposer $\operatorname{supp}\chi \subset B(0, R_0)$, et donc

$$\chi\Pi_{\theta,z}\chi = \chi\Pi_z\chi = (\,\cdot\,, \overline{\chi f_\theta})\chi f_\theta = (\,\cdot\,, \overline{\chi f})\chi f$$

pour un $f \in L^2_{loc}$.

Résonances engendrées par un sommet

Théorème (Briet-Combes-Duclos et Sjöstrand '88)

Pour tout $C > 0$, et tout $h \in]0, h_0]$, il existe une bijection b_h entre $\Gamma_0(h) \cap D(E_0, Ch)$ et $\Gamma(h) \cap D(E_0, Ch)$ telle que $b_h(z) - z = o(h)$, où

$$\Gamma_0(h) = \{z_\alpha^0 = E_0 - ih \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \frac{1}{2})\lambda_j, \alpha \in \mathbb{N}^n\}.$$

Définition

On dit que z_α^0 est simple lorsque $z_\alpha^0 = z_{\alpha'}^0$ entraine $\alpha = \alpha'$.

- Dans le cas où z_α^0 est simple, la résonance $z_{\alpha=} b_h(z_\alpha^0)$ est simple et admet un développement asymptotique en puissance entière de h.
- Le nombre de résonances dans tout disque de la forme $D(E_0, Ch)$ est borné.

Estimation de la résolvante

Théorème

On fait les hypothèses (H,D,M,TS). Pour tout $C > 0$, il existe $K > 0$ et $h_0 > 0$ tels que si $h \in]0, h_0]$ et $z \in D(E_0, Ch)$,

$$\|(P_\theta - z)^{-1}\| \lesssim h^{-K} \prod_{z_j \in \Gamma(h) \cap D(E_0, 2Ch)} |z - z_j|^{-1}.$$

- Estimation polynomiale de la résolvante dans le complexe en situation hyperbolique : Ikawa, C.Gérard, ...
- Pour $z \in \mathbb{R}$, $|z - E_0| < \delta$, on obtient $\|(P - z)^{-1}\| \lesssim h^{-1} \ln h$ en appliquant le principe du maximum semiclassique (Burq). On a la même estimation sur le réel dans un cadre $\mathcal{C}^\infty$(BFRZ '07) (cf. aussi Christianson).

Enoncé du résultat principal

Théorème

On fait les hypothèses (H,D,M,TS). Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tel que z_α^0 est simple. En tant qu'opérateur de $L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\Pi_{z_\alpha} = c(h)(\,\cdot\,,\overline{f})f, \text{ avec } c(h) = h^{-|\alpha|-\frac{n}{2}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(|\alpha|+\frac{n}{2})}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{\alpha_j+\frac{1}{2}},$$

où
i) $f(x,h)$ est localement uniformément dans $L^2(\mathbb{R}^n)$,
ii) $f(x,h)$ est solution de l'équation de Schrödinger : $(P-z_\alpha)f=0$,
iii) $f(x,h)$ est sortante : $f=0$ microlocalement près de chaque point (x,ξ) tel que $|x|>>1$, $\cos(x,\xi)<-\frac{1}{2}$.
iv) $f=d(x,h)e^{i\varphi_+(x)/h}$ microlocalement près de $(0,0)$, où $d(x,h)\in S(1)$ est un symbole classique vérifiant

$$d(x,h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} d_j(x)h^j \quad \text{ et } \quad d_0(x) = x^\alpha + \mathcal{O}(x^{|\alpha|+1}).$$

Quelques commentaires

- Pour $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty$, $\|\chi \Pi_{z_\alpha} \chi\| \sim h^{-|\alpha| - \frac{n}{2}}$: le projecteur n'est pas borné, et sa norme dépend de la résonance.
- Dans le cas des résonances de forme,

$$\chi \Pi_{z_\alpha} \chi = \chi \widetilde{\Pi_{\lambda_\alpha}} \chi + O(e^{-C/h}),$$

  où $\widetilde{\Pi_{\lambda_\alpha}}$ est le projecteur spectral associé à la valeur propre λ_α du problème à un puits correspondant (Helffer-Sjöstrand), et $\|\chi \Pi_{z_\alpha} \chi\| \sim 1$.
- On peut penser comparer à notre problème à un oscillateur harmonique renversé ($x \to e^{-i\pi/4} x$), et imaginer que $\chi \Pi_{z_\alpha} \chi \sim c(h)(\,\cdot\,, \overline{\psi_\alpha})\psi_\alpha$ avec $\psi_\alpha \sim h^{-n/4} e^{-ix^2/2h} (e^{-i\pi/4} x/\sqrt{h})^\alpha$, ce qui semble coïncider avec notre résultat.
- On pourrait essayer de calculer l'état résonant f, par exemple avec des techniques de type forme normale (Briet-Combes-Duclos, Sjöstrand, Hassel-Melrose-Vasy). On est alors ramené au calcul de $c(h)^{-1} = \int f^2(x,h) dx \dots$

Notre stratégie

- Construire un u_α pour lequel
  1. on sache calculer Πu_α, qu'on écrit $c_1 f$ en identifiant l'état résonant f ;
  2. on sache calculer $c_2 = (u_\alpha, \bar{f})$;

On obtiendra alors $\Pi = c(\,\cdot\,, \bar{f})f$, avec $c = c_1/c_2$.

- On suppose toujours z_α^0 simple. On travaille pour des z dans

$$\mathcal{C}(\alpha, h) = D(z_\alpha^0, C_1 h) \setminus D(z_\alpha^0, C_2 h)$$

tels que z_α^0 est la seule "résonance formelle" dans $D(z_\alpha^0, C_2 h)$.

- On notera que $\|(P_\theta - z)^{-1}\| = \mathcal{O}(h^{-C})$ uniformément pour $z \in \mathcal{C}(\alpha, h)$.

Une courbe hamiltonnienne bien choisie

- $\Lambda_\pm$ est la variété stable sortante (entrante) : $(x,\xi) \in \Lambda_+$ (Λ_-) ssi $\exp tH_p(x,\xi) \to (0,0)$ quand $t \to -\infty$ $(+\infty)$.

- Plus précisément (Helffer-Sjöstrand), si $\rho \in \Lambda_-$, et $\gamma(t) = \exp(tH_p)(\rho)$,

$$\gamma(t) = \sum_{k\geq 1} \gamma_{\mu_k}(t) e^{-\mu_k t} \text{ quand } t \to +\infty, \gamma_{\mu_k}(t) = \sum_{m=0}^{M_k} \gamma_{\mu_k,m} t^m,$$

où $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$ sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers des λ_j.

Lemme

Soit $J(\alpha) = \{j \in [[1,n]], \alpha_j \neq 0\}$. Il existe une courbe $\gamma = \gamma_\alpha \subset \Lambda_-$ telle que, pour tout $j \in J(\alpha) \cup \{1\}$,

$$\gamma_{\lambda_j} = \gamma_{\lambda_j,0} \neq 0.$$

- La construction γ_α repose sur le fait que, puisque z_α^0 simple, pour $j \in J(\alpha)$, $\lambda_j = \lambda \cdot \beta$ entraine $|\beta| = 1$ (toujours vrai pour $j = 1$).

Dans la zone entrante

- On peut construire $v(x,z,h)=b(x,z,h)e^{i\psi(x)/h}$ une solution BKW de $(P-z)v=\mathcal{O}(h^\infty)$ dans une couronne autour de $0\in\mathbb{R}^n$, avec
  1. $|\nabla\psi|^2+V(x)=E_0$.
  2. $\Lambda_\psi\cap\Lambda_-=\gamma_\alpha$ avec intersection transverse, où $\Lambda_\psi=\{(x,\nabla\psi(x))\}$.
  3. $b(x,z,h)=\sum_{j=0}^N b_j(x,z)h^j+\mathcal{O}(h^{N+1})$ uniformément pour $z\in D(E_0,C_0h)$.
  4. b et les b_j sont C^∞ en x et holomorphe en $z\in D(E_0,C_0h)$
- On pose $u_\alpha=[P,\chi]v$, et $w=(P_\theta-z)^{-1}u_\alpha$, où $\chi\in\mathcal{C}_0^\infty$, $\chi=1$ près de 0. On note que

$$\Pi u_\alpha=-\frac{1}{2i\pi}\oint(P_\theta-z)^{-1}u_\alpha dz=-\frac{1}{2i\pi}\oint w\ dz.$$

Proposition

Dans un voisinage de $(0,0)$,

1. $w=0$ microlocalement près de tout $\rho\in\Lambda_-\setminus\gamma_\alpha$.
2. $w=v$ microlocalement près de tout $\rho\in\gamma_\alpha$.

Au point critique

- On a

$$\begin{cases} (P-z)w = (P_\theta - z)w = [P,\chi]v = 0 \text{ dans un voisinage de } 0, \\ w = v \text{ microlocalement près de } \rho \in \gamma_\alpha \cap \{|x| = \delta\}, \\ w = 0 \text{ microlocalement près de } \rho \in (\Lambda_- \cap \{|x| = \delta\}) \setminus \gamma_\alpha, \\ \|w\| = \mathcal{O}(h^{-C}). \end{cases}$$

(BFRZ '07), donne une représentation de l'unique solution w microlocalement près de $(0,0)$, dont on déduit la

Proposition

Microlocalement près de $(0,0)$, on a

$$\Pi u_\alpha(x) = -\frac{1}{2i\pi} \oint w(x,z)\, dz \sim h^{\frac{1}{2}-|\alpha|} e^{i\varphi_+(x)/h} e^{i\psi(0)/h} \sum_{j=0}^{+\infty} \widehat{a}_j(x) h^j,$$

avec

$$\psi(0) = \lim_{t\to+\infty} \psi(x_\alpha(t)),$$

$$\widehat{a}_0(x) = -\frac{i^{|\alpha|+1}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\alpha!} a_{0,0}(x) x^\alpha \prod_{j=1}^{n} (-\lambda_j g_j)^{\alpha_j}, g_j = \Pi_x \gamma_{\lambda_j}.$$

Fin de la preuve

- On pose

$$f(x) = \frac{1}{c_1(h)} \Pi u_\alpha(x) = d(x,h) e^{i\varphi_+(x)/h},$$

$$\text{où } c_1(h) = -\frac{i^{|\alpha|+1}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\alpha!} a_{0,0}(0)(-\lambda g^-)^\alpha h^{\frac{1}{2}-|\alpha|} e^{i\psi(0)/h}$$

et ce f vérifie les points i) à iv) du Théorème.

- Il reste à calculer

$$\begin{aligned} c_2(h) = (u_\alpha, \overline{f}) &= ([P,\chi] b e^{i\psi/h}, \overline{d e^{i\varphi_+/h}}) + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= \int \tilde{b}(x,h) d(x,h) e^{i(\psi(x)-\varphi_-(x))/h} dx + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= \int r(t,h) e^{i(\psi(x(t))-\varphi_-(x(t)))/h} dt + \mathcal{O}(h^\infty) \end{aligned}$$

par un calcul de phase stationnaire dans les variables transverses à γ_α. On remarque que $\psi(x(t)) - \varphi_-(x(t)) = \psi(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et on conclut en calculant l'intégrale du terme principal du symbole $r(t,h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} r_j(t) h^{\frac{n+1}{2}+j}$.

Définition de l'amplitude de diffusion

- Si $\rho > (n+1)/2$, alors pour tous $\omega, \theta \neq \omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, et tout $E > 0$, Il existe un unique $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\begin{cases} Pu = Eu, \\ u(x,h) = e^{i\sqrt{2E}x\cdot\omega/h} + \mathcal{A}(\omega,\theta,E,h)\frac{e^{i\sqrt{2E}x\cdot\theta/h}}{|x|^{(n-1)/2}} + o(|x|^{(1-n)/2}), \end{cases}$$

quand $|x| \to +\infty$ avec $\frac{x}{|x|} = \theta$. $\mathcal{A}$ est l'amplitude de diffusion à énergie E pour la direction entrante ω et la direction sortante θ. La matrice de diffusion à énergie E est l'opérateur

$$\mathcal{S}(E,h) = I + 2i\pi c(E,h)\mathcal{A} : L^2(\mathbb{S}^{n-1}) \to L^2(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Définition de l'amplitude de diffusion

- Si $\rho > (n+1)/2$, alors pour tous $\omega, \theta \neq \omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, et tout $E > 0$, Il existe un unique $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\begin{cases} Pu = Eu, \\ u(x,h) = e^{i\sqrt{2E}x\cdot\omega/h} + \mathcal{A}(\omega,\theta,E,h)\frac{e^{i\sqrt{2E}x\cdot\theta/h}}{|x|^{(n-1)/2}} + o(|x|^{(1-n)/2}), \end{cases}$$

quand $|x| \to +\infty$ avec $\frac{x}{|x|} = \theta$. $\mathcal{A}$ est l'amplitude de diffusion à énergie E pour la direction entrante ω et la direction sortante θ. La matrice de diffusion à énergie E est l'opérateur

$$\mathcal{S}(E,h) = I + 2i\pi c(E,h)\mathcal{A} : L^2(\mathbb{S}^{n-1}) \to L^2(\mathbb{S}^{n-1}).$$

- Dans le cas général la matrice de diffusion $\mathcal{S}(E)$ peut être définie à l'aide des opérateurs d'onde

$$W_\pm = \underset{t\to\pm\infty}{s - lim}\, e^{-itP/h} e^{itP_0/h}.$$

L'opérateur de diffusion $S = W_+^* W_-$ commute avec P_0, et $\mathcal{S}(E)$ s'obtient en diagonalisant S sur la mesure spectrale de P_0

$$S = \mathcal{F}_{E,h}^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^+}^{\oplus} \mathcal{S}(E,h)dE\Big)\,\mathcal{F}_{E,h}, \quad \mathcal{F}_{E,h}f(\omega) = c_{h,n,E}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sqrt{2E}\langle\omega,x\rangle/h} f(x)\,dx$$

Prolongement de l'amplitude de diffusion

- Pour E réel, et V à courte (longue) portée,

$$\mathcal{A}(\omega, \theta, E, h) = i\pi E^{\frac{n-2}{2}} \langle (P - (E + i0))^{-1} e^{i\phi_2/h} t_2, e^{i\phi_1/h} t_1 \rangle + hol.$$

où les t_j et ϕ_j sont des symboles et des phases construits par Isozaki et Kitada.

- Pour V à support compact, avec $\chi_1 \prec \chi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{A}(\omega, \theta, E, h) = i\pi E^{\frac{n-2}{2}} \langle (P - (E + i0))^{-1} [h^2\Delta, \chi_2] e^{i\sqrt{E}x\cdot\omega/h}, [h^2\Delta, \chi_1] e^{i\sqrt{E}x\cdot\theta/h} \rangle$$

On prolonge à z complexe par (C.Gerard-Martinez dans le cas à longue portée)

$$\mathcal{A}(\omega, \theta, z, h) = i\pi z^{\frac{n-2}{2}} \langle (P_\mu - z)^{-1} [h^2\Delta, \chi_2] e^{i\sqrt{z}x\cdot\omega/h}, [h^2\Delta, \chi_1] e^{i\sqrt{z}x\cdot\theta/h} \rangle$$

Le résidu de l'amplitude de diffusion

- On obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(\mathcal{A}(\omega,\theta,z,h), z = z_\alpha) &= i\pi(z_\alpha)^{(n-2)/2}\langle \Pi_\mu [h^2\Delta,\chi_2] e^{i\sqrt{z_\alpha}x\cdot\omega/h}, [h^2\Delta,\chi_1] e^{i\sqrt{z_\alpha}x\cdot\theta/h}\rangle \\ &= C(h)\langle f, [h^2\Delta,\chi_1] e^{i\sqrt{z_\alpha}x\cdot\theta/h}\rangle \, \langle [h^2\Delta,\chi_2] e^{i\sqrt{z_\alpha}x\cdot\omega/h}, \bar{f}\rangle\end{aligned}$$

- Résultats connus :
  - Lahmar-Benbernou, Lahmar-Benbernou-Martinez : le cas du puits dans l'isle.

$$|\mathrm{Res}(\mathcal{A}(z), z = z_0)| = a(h)|\operatorname{Im} z_0|, \, a(h) = \sum a_j h^j.$$

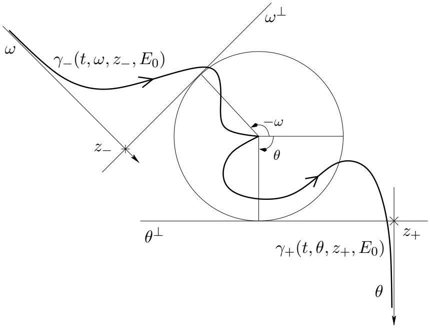
  - Stefanov, Michel : pour les résonances très proches du réel, isolées et bien séparées,

$$\mathrm{Res}(\mathcal{A}(z), z = z_0) = \mathcal{O}(h^{-\frac{n-1}{2}}|\operatorname{Im} z_0|).$$

Hypothèses géométrique

- Soit $\omega \neq \theta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

- On note Λ_ω^- (Λ_θ^+) les points de $T^*\mathbb{R}^n$ situés sur toute trajectoire qui part à l'infini dans la direction ω quand $t \to -\infty$ (direction θ quand $t \to +\infty$).



- On suppose que $\Lambda_\omega \cap \Lambda_- = \gamma_-$, $\Lambda_\theta \cap \Lambda_+ = \gamma_+$, avec intersection transverse.

Calcul du résidu

- Si $\gamma_\pm(t) = (x_\pm(t), \xi_\pm(t))$, on a $x_\pm(t) = \sum_{k\geq 1} g^\pm_{\mu_k}(t) e^{\mp \mu_k t}$ quand $t \to \pm\infty$, où $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$ sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers des λ_j.

$$x_-(t) = g^-_{\lambda_\nu} e^{-\lambda_\nu t}(1 + \mathcal{O}(e^{-\epsilon t})), t \to +\infty,$$
$$x_+(t) = g^+_{\lambda_\mu} e^{\lambda_\mu t}(1 + \mathcal{O}(e^{-\epsilon t})), t \to -\infty.$$

Théorème

$$\mathrm{Res}(\mathcal{A}(\omega, \theta, z, h), z = z_\alpha) = h^{1+\frac{n}{2}-|\alpha|} e^{i(S_- + S_+)/h} \sum_{j\geq 0} a_j(\omega, \theta, z_\alpha) h^j,$$

avec

$$a_0(\omega, \theta, z_\alpha) = -\frac{1}{2}(2\pi)^{n/2} i^{\frac{n}{2}-|\alpha|} (E_0)^{(n-2)/2} \prod \lambda_j^{\alpha_j - 1/2}$$
$$\mathcal{D}_-\mathcal{D}_+ |g^-_{\lambda_\nu}|\, |g^+_{\lambda_\mu}| (\lambda_\nu \lambda_\mu)^{3/2} \prod_j (g^-_{\lambda_j})^{\alpha_j} (g^+_{\lambda_j})^{\alpha_j}.$$

où $S_\pm$ sont les actions classiques le long de $\gamma_\pm$ et $\mathcal{D}_\pm \neq 0$ les déterminants de Maslov correspondants.

Evolution quantique

Théorème

Pour toute fonction $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, et toute $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ supportée près de E_0,

$$\chi e^{-itP/h} \chi f(P) = \sum_{\substack{z_\alpha \in D(E_0, Ch) \\ \operatorname{Im} z_\alpha > \nu h}} \chi \operatorname{Res}(e^{-itz/h} \mathcal{R}(z,h), z = z_\alpha) \chi f(P)$$

$$+ \mathcal{O}(h^\infty) + \mathcal{O}(h^{-k(\nu)} e^{-\nu t/h})$$

$$= \sum_{\substack{z_\alpha \in D(E_0, Ch) \\ \operatorname{Im} z_\alpha > \nu h}} \chi e^{-itz_\alpha/h} \chi \Pi_\alpha \chi f(P) + \mathcal{O}(h^\infty) + \mathcal{O}(h^{-k(\nu)} e^{-\nu t/h})$$

quand tous les z_α^0 de la somme sont simples.

- il existe $C > 0$ tel que le premier terme domine si $C \ln 1/h < t < M \ln 1/h$.

- Résultats connus :
  - Lax-Philips et Vainberg (cas non-captif),
  - Tang-Zworski (cas captif pour des résonances très proches du réel),
  - Petkov-Stoyanov (groupe des ondes pour obstacles convexes),
  - Christiansen-Zworsky, Guillarmou-Naud (géométrie hyperbolique),
  - Nakamura-Stefanov-Zworski (puits dans l'ile).
- Une autre application : le groupe des ondes pour De Sitter-Schwartzchild.