Donc $(1+z)^\alpha = \text{cste} \cdot \exp \alpha \log(1+z)$ $\quad z=0 \Rightarrow \text{cste} = 1$.

Chapitre 3 : Formule de Cauchy.

a) intégrales curvilignes

Soient $a<b \in \mathbb{R}$.

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin continu C^1 par morceaux c'est à dire qu'il existe $a_0 = a < a_1 < \dots < a_k = b$ tq $\gamma|_{[a_i ; a_{i+1}]}$ soit C^1 et

Soit $\alpha \in E^1 \cap C^0(U)$ où U ouvert contenant $\gamma[a,b]$.

On définit $$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$\alpha = \alpha_x dx + \alpha_y dy \qquad \alpha_x, \alpha_y \in C^0(U)$$

$$\alpha_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) = \alpha_x(\gamma(t))\, x'_\gamma(t) + \alpha_y(\gamma(t))\, y'_\gamma(t) \qquad \gamma(t) = x_\gamma(t) + i y_\gamma(t)$$

Proposition (0) $\int_\gamma$ est $\mathbb{C}$-linéaire en α.

(1) Soit $\varphi : [\bar a, \bar b] \to [a,b]$ une bijection croissante de classe C^1 ainsi que son inverse (ie $\varphi' > 0$). Soit $\bar\gamma = \gamma \circ \varphi$.

$$\forall \alpha \in E^1 \cap C^0(U) \qquad \int_{\bar\gamma} \alpha = \int_\gamma \alpha$$

(2) Soit $\psi \in C^1(U)$ $$\int_\gamma d\psi = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a))$$

(3) $\alpha \in E^0 \cap C^1(U)$ $\quad \|\alpha_p\| = \sqrt{\alpha_x(p)^2 + \alpha_y(p)^2}$

$$\left| \int_\gamma \alpha \right| \leq \sup_{p \in \gamma[a,b]} \|\alpha_p\| \cdot \text{long}(\gamma) \qquad \text{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

Preuve:

(1) ceci résulte de $$\int_{\bar a}^{\bar b} F(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_a^b F(s)\, ds \qquad F \in C^0[a,b]$$

appliqué à $F(s) = \alpha_{\gamma(s)} \cdot \gamma'(s)$

(2) $$d\psi_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) = \frac{d}{dt} \psi(\gamma(t))$$

$$\int_\gamma d\psi = \int_a^b \frac{d}{dt} \psi(\gamma(t))\, dt = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a))$$

(3) clair.

Variante: Si $\lambda : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est un lacet C^1 par morceaux on définit $\int_\lambda \alpha = \int_\gamma \alpha$ où $\gamma : [x; x+T] \to \mathbb{C}$ est un relèvement arbitraire de λ.

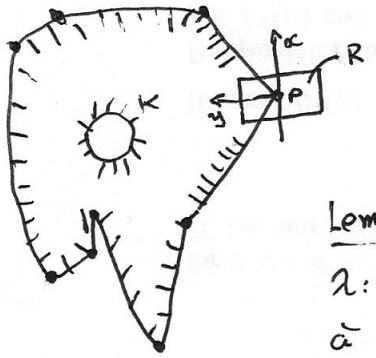
~~Le lemme de Goursat~~

b) théorème de Cauchy

Déf $K \subset\subset \mathbb{C}$ est un compact à bord C^1 par morceaux ssi :

$\forall p \in \partial K = K - K_0$ il existe un système de coordonnées orthonormales directes (x,y) centrées en p, un rectangle $R = \{(x,y) : -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \quad -\delta \leq y \leq \delta\}$ et une fonction h continue C^1 par morceaux sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$ telle que $-\delta < h < \delta$ vérifiant :

$$K \cap R = \{(x,y) : -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \quad h(x) \leq y \leq +\delta\} \quad (+)$$



Exemple : Soit $f \in C^1(\mathbb{C};\mathbb{R})$ telle que $K = f^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0})$ soit compact et $f^{-1}(0) \cap \{\frac{\partial f}{\partial x} = 0\} \cap \{\frac{\partial f}{\partial y} = 0\} = \emptyset$

Alors K est un compact à bord C^1 (par morceaux)

Preuve : Conséquence du théorème des f^{ns} implicites.

Lemme : 1) Il n'y a qu'un nbre fini de composantes connexes de ∂K.

2) Soit C une composante connexe de ∂K. Il existe alors $\lambda : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow C$ une homéomorphisme C^1 par morceaux unique à reparamétrisation croissante près tel que K se trouve à gauche de λ ie

- $\forall \theta \quad \gamma'(\theta) \neq 0$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad (p(\theta); \gamma'(\theta); R_{\frac{\pi}{2}} \gamma'(\theta))$ est une base orthonormale directe dont le système de coordonnées cartésiennes permet de définir un rectangle tq $(+)$

Terminologie : une telle λ est une paramétrisation régulière de C

Remarque : si θ est un pt de non dérivabilité de γ on interprétera $\gamma'(\theta)$ comme $\gamma'_l(\theta)$ ou $\gamma'_r(\theta)$

Preuve : omise. élémentaire mais pénible à rédiger.

Déf : $\oint_{\partial K} = \sum_{i=1}^{r} \int_{\lambda_i}$ où $C_1 \dots C_r$ cc de ∂K et λ_i paramétrisations régulières de C_i

Théorème (Cauchy) $f \in \mathcal{O}(D)$ $K \subset D$ compact à bord C^1 par morceaux

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0$$

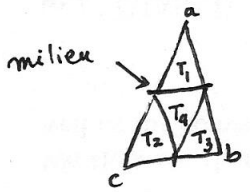
Preuve : Pas ro! (lemme de goursat)

Soit T un triangle contenu dans Ω (ie $T = \cancel{\text{fermé}}$ convexe $(a,b,c) \subset \Omega$)
alors T est à bord C^1 par morceaux et

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0,$$

<u>Preuve</u>: Supposons $\displaystyle\int_{\partial T} f(z)\,dz = I$.

On découpe T en 4 triangles comme suit:



on a $T_1 T_2 T_3$ homothétiques de rapport $1/2$ de T
T_4 semblable à $\frac{1}{2}T$

$$\int_{\partial T} = \int_{\partial T_1} + \int_{\partial T_2} + \int_{\partial T_3} + \int_{\partial T_4}$$

Donc il existe $T(1) \subset T$ $\quad T(1)$ semblable à $\frac{1}{2}T$ tel que

$$\left| \int_{\partial T(1)} f(z)\,dz \right| \geq \frac{|I|}{4}.$$

Itérant nous construisons une suite $T(n)$ de triangles emboîtés tels que

$$\left| \int_{\partial T(n)} f(z)\,dz \right| \geq \frac{|I|}{4^n}$$

$T(n)$ semblable à $\frac{1}{2}T$.

En part. $\operatorname{diam} T(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T(n) = \{z_0\} \subseteq T$

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0) + |z-z_0|\,\varepsilon(z-z_0) \qquad \lim_{z\to z_0} \varepsilon(z-z_0) = 0$$

$\cancel{|\varepsilon(z-z_0)| < \varepsilon}$

$$\int_{\partial T(n)} f(z)\,dz = \int_{\partial T(n)} |z-z_0|\,\varepsilon(z-z_0)$$

en effet $\left[f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0)\right]dz = d\left(z \mapsto f(z_0)z + f'(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2}\right)$

$\operatorname{long}(\partial T(n)) = 1/2^n \operatorname{long} \partial T$
$\operatorname{diam}(\partial T(n)) = 1/2^n \operatorname{diam}(\partial T)$ donc

$$\int_{\partial T(n)} |z-z_0|\,\varepsilon(z-z_0) \leq \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}\,\text{cste.} \sup_{z\in\partial T(n)} \varepsilon(z-z_0)$$

De là $\displaystyle|I| \leq C \sup_{z\in\partial T(n)} \varepsilon(z-z_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis $I = 0$.

Pas n°2. Un compact K à bord C^1 par morceaux ~~est~~ dit à bord polygonal si les paramétrisations régulières de ses composantes de bord peut être choisies affines par morceaux.

Le bord de K est alors une réunion de segments et on peut supposer que deux de ces segts s'ils se rencontrent (nécessairet en une extrémité) n'ont pas la même direction sinon on peut les fusionner

On appelle arêtes ces segts maximaux dans le bord de K.

une arête de K est clivante si la droite qui la contient découpe le plan en 2 demi plans fermés dont K rencontre l'intérieur

Si a est clivante Π_a^1 et Π_a^2 les 2 demi plans on pose

$$K = K \cap \Pi_a^1 \cup K \cap \Pi_a^2 = K_1 \cup K_2$$

on a
$$\begin{cases} \int_{\partial K} = \int_{\partial K_1} + \int_{\partial K_2} \\ K_1 \text{ et } K_2 \text{ ont chacun moins de } A-1 \text{ arêtes clivantes où} \end{cases}$$

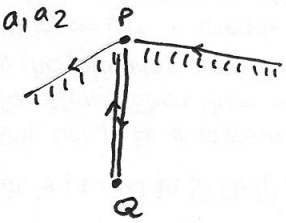
A est le nombre d'arêtes clivantes de K.

En effet les arêtes clivantes de K_i sont à prendre parmi celles de K moins la a.

Donc on peut écrire $\int_{\partial K} = \sum_i \int_{\partial K_i}$ où K_i est à bord polygonal sans arête clivante (= convexe....)

~~Soit K sans~~ Supposons K sans arête clivante et choisissons $p \in \partial K$ un sommet

P rencontre ~~deux~~ arêtes $a_1 a_2$ comme dessiné:



Si K n'est pas un triangle il y a un sommet de K qui est dans l'intersection $\Pi_{a_1}^o \cap \Pi_{a_2}^o$ où Π_{a_1} Π_{a_2} sont les deux demi plans fermés contenant K dirigés par a_1 et a_2

Soit D la droite joignt P à Q Π_1 Π_2 les deux demiplans qu'elle délimite

$K = K \cap \Pi_1 \cup K \cap \Pi_2 = K_1 \cup K_2$ on a

$$\int_{\partial K} = \int_{\partial K_1} + \int_{\partial K_2}$$

K_1 et K_2 ont chacun moins de $S-1$ sommets où S = nombre de sommets de K

Donc $\exists\, T_1 \dots T_r$ des triangles tq $K = \bigcup T_i$ et

$$\int_{\partial K} = \sum_{i=1}^{r} \int_{\partial T_i}$$

Ainsi le théorème est correct pour les compacts à bord polygonal.

Pas n°3

$\exists$ K_n une suite de compact à bords polygonaux contenus dans U

tq $\displaystyle\int_{\partial K_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\partial K}$. (dans les formes linéaires continues sur $E^1 \cap C^0(U)$).

Preuve: (idée) on fait une approximation affine par morceaux suffisant fine des paramétrisations régulières des cc du bord de K. $\square$.

Une preuve alternative:

Green-Riemann $\forall \alpha \in E^1 \cap C^1(U)$

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_K d\alpha$$

si $\alpha = f(z)dz$, $f \in \mathcal{O} \cap C^1$ cauchy Rieman $\Rightarrow d\alpha = 0$

d'où le théorème de Cauchy si $f \in \mathcal{O} \cap C^1(U)$.

Convolution Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+)$ $\int \rho = 1$

$$f_\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{C}} \varepsilon^2 \rho_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(z-x)\, dx$$

$f_\varepsilon \in \mathcal{O} \cap C^1(U_\varepsilon)$

$U_\varepsilon = \{ z \in U \quad d(z, \partial U) > \varepsilon \}$

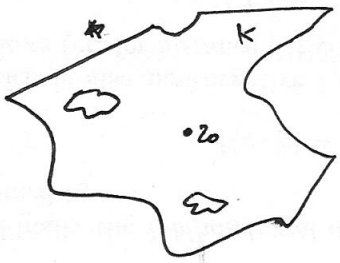
$f_\varepsilon \in \mathcal{O} \cap C^\infty(U)$ et $f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ uniformément sur les compacts. $\square$.

c) formule de Cauchy

Thm Soit $K \subset U$ à bord C^1 par morceaux soit $z_0 \in \mathring{K}$

$\forall f \in \mathcal{O}(U)$: $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(t)\,dt}{t - z_0}$$

Preuve:



Soit $\varepsilon > 0$ tq $\bar{D}(z_0, \varepsilon) \subseteq \mathring{K}$

$K' = K \setminus D(z_0, \varepsilon)$

$\partial K' = \partial K - \partial \bar{D}(z_0, \varepsilon)$

$= \partial K - S_{z_0}(\varepsilon)$

appliqué Cauchy à $\frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - z_0} \in \mathcal{O}(U \setminus z_0)$ il vient:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f(t)\,dt}{t-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{z_0}(\varepsilon)}\frac{f(t)\,dt}{t-z_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\,\frac{\varepsilon e^{i\theta}\,i\,d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} \qquad t-z_0=\varepsilon e^{i\theta}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(z_0) \qquad \square.$$

En particulier $f|_K$ ne dépend que de $f|_{\partial K}$.

d) ~~[illegible]~~ Fonctions holomorphes sur un disque

Théorème: Soit $R>0$ et $f\in\mathcal{O}(D(0,R))$. Alors $\exists\, g\in\mathbb{C}[[z]]_R$ $g=\sum a_n z^n$ ~~$f(z-z_0)$~~ tel que $f=S(g)$.

~~[illegible]~~

Corollaire: ~~[illegible]~~. Toute fonction holomorphe est de classe C^∞.

Preuve: Soit $r<R$ et $|z|<r$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_0(r)}\frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_0(r)}\frac{f(t)\,dt}{t}\,\frac{1}{1-z/t}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_0(r)}f(t)\frac{dt}{t}\sum_{n=0}^{\infty}z^n/t^n \longleftarrow \text{convergence uniforme pour } t\in S_0(r)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\int_{S_0(r)}\frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}} \longleftarrow \text{indépendant de } r \text{ par le th de Cauchy}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n. \qquad \square.$$

~~Corollaire~~ ~~[illegible]~~

Corollaire Soit $f\in\mathcal{O}(U)$ $z_0\in U$ $R>0$ tq $D(z_0,R)\subset U$

$T_{z_0}f = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}z^n$ de rayon de convergence au moins R et pour $z\in D(z_0,R)$ $f(z)=S(T_{z_0}f)(z-z_0)$

Corollaire Soit $f\in\mathcal{O}(U)$ $\forall a\in\mathbb{C}$ $f^{-1}(a)$ est discret dans U (principe des zéros isolés).

e) Fonctions holomorphes sur un anneau

~~Théo~~

~~Une série~~

<u>Thm:</u> Soient $r < R$ et f holomorphe sur $\{r < |z| < R\}$. Il existe alors $q_1 \in \mathbb{C}[[z]]_R$ $q_2 \in \mathbb{C}[[z]]_{1/r}$ tq :

$$f(z) = S(q_1)(z) - S(q_2)(1/z)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n z^n \qquad a_n = n \text{ ème coeff de } q_1 \text{ si } n > 0, \; q_2 \text{ si } n < 0$$

$$= q_1(0) - q_2(0) \text{ si } n = 0$$

<u>Preuve:</u>

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{f(t)\,dt}{t} \frac{1}{1 - z/t} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(t)\,dt}{z} \frac{1}{1 - t/z} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}. \quad \square$$

<u>f) méromorphie vs sing. essentielles</u>

Dans le cas particulier où $r = 0$ on a aussi

$$f(z) = \sum_{n \leq p} a_n z^{+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{pour } 0 < |z| < R$$

~~Si la sér~~

~~Dém~~ $\exists N > 0$ $z^N f(z)$ s'étd à ~~c~~ fonction holomorphe sur $|z| < R$

$\iff \sum_{n \leq -1} a_n z^{-n}$ est une série finie, ~~[illegible]~~ ie un polynôme.

Soit mtt U un ouvert $S \subset U$ un ens de discret et $f \in \mathcal{O}(U - S)$

Si $\forall z_0 \in S$ $\exists N$ $(z - z_0)^N f$ s'étd à ~~un~~ fonction holomorphe au dessus de S

on dit que f est méromorphe sur U. ~~[illegible]~~

Dans le cas contraire les mauvais $z_0 \in S$ sont qu'des singularités essentielles de f. On omettra la preuve de ce :

<u>Théorème</u> (Casorati-Weierstrass) 3 possibilités exclusives : pour $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ $z_0 \in S$

- $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe dans $\mathbb{C}$ et f se prolonge a une fonction holo sur U
- $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$ et f méromorphe en z_0
- $f(z)$ admet tout elt de $\mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ comme vadh qd $z \to z_0$ et f a une sing. essentielle en z_0.

g) inversion de fonctions holomorphes

Théorème : (1) Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ et $z_0 \in U$ $f'(z_0) \neq 0$ alors il existe $z_0 \in U' \subset U$ un ouvert tq $f : U' \to f(U')$ soit une bijection d'image ouverte et $f^{-1} : f(U') \to U'$ est holomorphe.

(2) Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ et $z_0 \in U$ $f'(z_0) = 0$. ~~alors il existe~~ si f n'est pas constante il existe $m > 0$ ~~et $\varphi \in \mathcal{O}(U')$~~ tq $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m$

$z_0 U' \subset U$

$\varphi \in \mathcal{O}(U)$ $\varphi(0) = 0$

$\varphi'(z_0) \neq 0$

en particulier f n'est pas injective sur U'.

(3) Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ ~~alors~~ $f(U)$ est ouvert (thm de l'applicti ouverte)

(4) Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ tq $f : U \to f(U)$ est injective. Alors $f^{-1} \in \mathcal{O}(f^{-1}U)$.

Preuve (1) $f \in \mathcal{O}(U) \Rightarrow f \in C^1$ $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow df_{z_0}$ inversible.

donc le théorème d'inversion locale s'applique et il ~~faut~~ suffit de voir que de plus $f^{-1} : f(U') \to U'$ est holomorphe. Mais

$$df^{-1}_{f(z_0)} = (df_{z_0})^{-1}$$ ~~est~~ l'inverse d'une applict $\mathbb{C}$-linéaire $z \to az$ est $\mathbb{C}$-linéaire (c'est $z \to a^{-1}z$).

~~Rmk~~ : $$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

(2). $$f(z) = f(z_0) + a_m (z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots$$

$$= f(z_0) + \left(a_m^{1/m}(z - z_0)\right)^m \left(1 + b_1(z - z_0) + \cdots\right)$$

~~il suffit de voir que toute série entière converge de la forme~~

mais log est bien défini près de 1 de sorte que

$$1 + b_1(z - z_0) + \cdots = \exp \underbrace{\log\left(1 + b_1(z - z_0) + \cdots\right)}_{\text{holomorphe}}$$

$$= \left(\exp \frac{1}{m} \log(\text{——})\right)^m. \quad \square$$

(3) Comme $z \to z^m$ est ouverte par (3) f est localt composée d'applications ouvertes. Donc f ouverte.

(4) Conséquence de (1), (2), (3).