A portrait of a man with dark, wavy hair, wearing a dark coat over a white cravat. The background is a light, textured pattern.

Université Joseph Fourier  
École d'été de mathématiques 1996 :  
Analyse complexe  
Cours de géométrie différentielle et holomorphe

Thierry Bouche

Introduction à la géométrie différentielle des variétés analytiques complexes

## Table des matières

<b>1 Variétés, applications différentiables, fibrés vectoriels</b>	<b>4</b>
1.1 Variété . . . . .	4
1.1.1 Définitions. . . . .	4
1.1.2 Applications $\mathcal{C}^\infty$ . . . . .	6
1.2 Fibré tangent . . . . .	8
1.2.1 Espace tangent. . . . .	8
1.2.2 Espace cotangent. . . . .	12
1.2.3 Dualité tangent-cotangent. . . . .	13
1.2.4 Sous-variétés. . . . .	13
1.2.5 Variétés à bord. . . . .	16
1.3 Fibrés vectoriels . . . . .	17
1.3.1 Définition. . . . .	17
1.3.2 Sections, morphismes. . . . .	19
1.3.3 Opérations algébriques sur les fibrés vectoriels. . . . .	20
<b>2 Formes différentielles</b>	<b>22</b>
2.1 Définition des tenseurs . . . . .	22
2.2 Opérations sur les tenseurs . . . . .	23
2.2.1 Produit tensoriel. . . . .	23
2.2.2 Contraction. . . . .	23
2.2.3 Symétrisation. . . . .	24
2.2.4 Antisymétrisation. . . . .	24
2.3 Formes différentielles . . . . .	25
2.3.1 Produit extérieur. . . . .	25
2.3.2 Produit intérieur par un champ de vecteurs. . . . .	27
2.4 Opérateur $d$ . . . . .	28
2.5 <i>Pull-back &amp; push-forward</i> . . . . .	31
2.6 Intégration sur les variétés . . . . .	32
2.6.1 Orientation. . . . .	32
2.6.2 Intégration. . . . .	33
2.6.3 Formule de Stokes. . . . .	35
2.6.4 Lemme de Poincaré. . . . .	37

2.6.5	Notion de cohomologie . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Structures complexes</b>	<b>40</b>
3.1	Structures presque complexes . . . . .	40
3.2	Opérateur $\bar{\partial}$ . . . . .	42
3.3	Lemme de Dolbeault-Grothendieck . . . . .	44
3.4	Cohomologie de Dolbeault . . . . .	46

## 1. Variétés, applications différentiables, fibrés vectoriels

### 1.1. Variété

Une variété  $\mathcal{C}^\infty$  est un objet sur lequel on souhaite pouvoir faire les mêmes calculs différentiels que sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour calculer une dérivée, il suffit de connaître la fonction dans un voisinage du point considéré, donc on va munir une variété d'une structure *locale* héritée de celle de  $\mathbb{R}^n$ . Par exemple, sur la figure 1, on observe que la courbe de gauche se recoupe en  $p$  donc ce n'est pas une variété : en effet, un voisinage même petit du point double  $p$  n'a pas la topologie d'un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Par contre la courbe de droite est une variété : tout point admet un petit voisinage qu'on peut identifier avec un intervalle de  $\mathbb{R}$  (remarquer à cette occasion que ceci n'est plus vérifié pour les *grands* voisinages : il y a toujours une dialectique entre phénomènes locaux et aspects globaux qui font apparaître la topologie ou la géométrie de la variété).

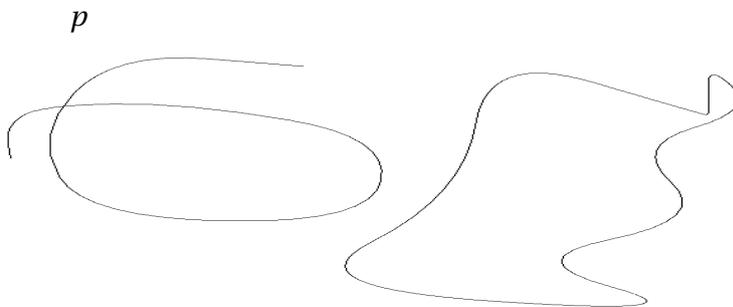


FIG. 1: À gauche : ce n'est pas une variété ; à droite, c'est une variété

#### 1.1.1. Définitions.

Étant donné un espace topologique  $M$  une *carte* (ou *application de coordonnées locales*) est la donnée d'un ouvert  $U \subset M$ , d'un ouvert  $V \subset \mathbb{R}^n$  et d'un homéomorphisme  $\varphi : U \rightarrow V$ . L'application réciproque s'appelle une *paramétrisation* de  $U$ . Un *atlas* est une collection de cartes  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  qui recouvrent  $M$ . La régularité de l'atlas est donnée par la régularité des *applications de recollement* (ou *changements de cartes*). Formellement, on donne la

DÉFINITION 1.1. — Un atlas de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $M$  est un recouvrement de  $M$  par des ouverts  $U_\alpha$  sur lesquels sont définies des cartes  $\varphi_\alpha$  telles que :

1.  $M \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  (les  $U_{\alpha}$  recouvrent  $M$ ) ;
2.  $\varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha}$  est un homéomorphisme de  $U_{\alpha}$  sur un ouvert  $V_{\alpha}$  de  $\mathbb{R}^n$  ;
3. Si  $U_{\alpha\beta} = U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ , alors  $\varphi_{\alpha\beta} = (\varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1})|_{\varphi_{\alpha}(U_{\alpha\beta})}$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\varphi_{\beta}(U_{\alpha\beta})$  (ce qui a bien un sens car  $\varphi_{\alpha\beta}$  est définie d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans un autre ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ).

Deux atlas sont équivalents si leur concaténation produit un nouvel atlas de même classe, ce qui revient à demander que les changements de cartes d'une carte d'un atlas vers une carte de l'autre atlas aient la bonne régularité.

DÉFINITION 1.2. — Une variété ( $\mathcal{C}^\infty$ ) de dimension  $n$  est la donnée d'un espace topologique  $M$ , et d'une classe d'équivalence d'atlas<sup>1</sup> (de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ).

Les variétés que je considérerai dans la suite seront en outre localement compactes, et dénombrables à l'infini — cette hypothèse technique ayant pour seul but de m'assurer l'existence de partitions de l'unité lorsque j'en aurai besoin. Si on préfère l'analyse complexe à l'analyse réelle, on peut choisir  $\mathbb{C}^n$  comme modèle local, et demander que les changements de carte soient holomorphes. On définit ainsi une *variété analytique complexe*. Pour fixer les idées, nous considérerons ici une application de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^p$  comme holomorphe si les  $p$  applications coordonnées sont complexe-analytiques, i.e. si elles se développent localement en séries entières dans les  $n$  coordonnées de  $\mathbb{C}^n$ .

Exemples :

1. Tout ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  est une variété de dimension  $n$ , avec comme atlas l'application identité définie sur l'ouvert  $\Omega$ .
2.  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  le cercle est une variété de dimension 1, avec comme atlas  $U_0 = \{\theta \neq 0 [2\pi]\}$  et  $U_\pi = \{\theta \neq \pi [2\pi]\}$ , les applications  $\varphi_\alpha$  consistant à prendre la détermination de l'angle respectivement dans les intervalles  $]0, 2\pi[$  et  $] -\pi, \pi[$ . Le changement de carte est une application affine, donc  $\mathcal{C}^\infty$ .
3. Le tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  est une variété de dimension 2, avec par exemple comme atlas :

$$\begin{aligned} U_{--} &= \{(x,y) : x \neq 0 [1], y \neq 0 [1]\} & U_{-+} &= \{(x,y) : x \neq 0 [1], y \neq 0,5 [1]\} \\ U_{+-} &= \{(x,y) : x \neq 0,5 [1], y \neq 0 [1]\} & U_{++} &= \{(x,y) : x \neq 0,5 [1], y \neq 0,5 [1]\} \end{aligned}$$

les applications  $\varphi$  consistant à prendre le représentant de la classe d'équivalence de  $(x,y)$  respectivement dans les intervalles

$$]0,1[ \times ]0,1[, \quad ]0,1[ \times ]0,5,1,5[, \quad ]0,5,1,5[ \times ]0,1[, \quad ]0,5,1,5[ \times ]0,5,1,5[$$

donc les changements de cartes sont des translations. En identifiant  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$ , on constate que  $\mathbb{T}^2$  admet une structure complexe car les similitudes de  $\mathbb{R}^2$  (ici des translations) sont évidemment holomorphes.

4. La sphère  $\mathbb{S}^2 = \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : \|x\|^2 = 1\}$  est une variété de dimension 2. On prend par exemple comme atlas les 6 ouverts  $U_i^\pm = \{x \in \mathbb{S}^2 : \pm x^i > 0\}$  qui recouvrent  $\mathbb{S}^2$  puisque  $\|x\|^2 = 1$  entraîne que l'une au moins des coordonnées  $x_i$  de  $x$  soit non nulle, et on définit les homéomorphismes  $\varphi_i^\pm$  par :

$$\begin{aligned} \varphi_i^\pm : U_i^\pm &\rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \\ x &\rightarrow (\dots, \hat{x}_i, \dots) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on projette sur l'hyperplan défini par l'annulation de la  $i$ -ème coordonnée de  $x$ . Montrons par exemple que les cartes  $\varphi_3^+$  et  $\varphi_2^-$  sont compatibles sur

$$U_3^+ \cap U_2^- = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1, x_3 > 0, x_2 < 0\}.$$

---

1. On voit facilement qu'il existe un atlas *maximal* dans lequel on a mis tous les atlas compatibles entre eux. La donnée d'une classe d'équivalence d'atlas est par conséquent équivalente à celle d'un atlas maximal.

On a ici  $\varphi_3^+(x) = (x_1, x_2)$  et  $\varphi_2^-(x) = (x_1, x_3)$  donc :

$$(\varphi_2^-)^{-1}(x, y) = (x, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, y)$$

et :

$$\varphi_3^+ \circ (\varphi_2^-)^{-1}(x, y) = (x, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

avec rappelons-le  $x^2 + y^2 < 1$ . Donc  $\varphi_3^+ \circ (\varphi_2^-)^{-1}$  est un difféomorphisme  $\mathcal{C}^\infty$  de

$$\varphi_2^-(\mathbb{S}^2 \cap \{x_2 < 0, x_3 > 0\}) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

sur

$$\varphi_3^+(\mathbb{S}^2 \cap \{x_2 < 0, x_3 > 0\}) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Bien que  $\mathbb{S}^2$  soit de dimension paire, l'atlas ci-dessus ne nous fournit pas de structure complexe.

*Exercices :*

1. Un autre atlas de  $\mathbb{S}^n$  est donné par les deux projections stéréographiques définies comme suit : la *projection stéréographique de pôle nord*  $\pi_+$  est l'application qui envoie tout point  $p$  de  $\mathbb{S}^n$  excepté le pôle nord sur le point du plan équatorial aligné avec le pôle nord et  $p$ . On définit de même la projection stéréographique de pôle sud. C'est un exercice facile de donner les expressions en coordonnées de ces deux applications. Il y a un seul recollement. Il est antiholomorphe : peut-on pourtant donner une structure holomorphe à  $\mathbb{S}^n$  ? Peut-on trouver un atlas de  $\mathbb{S}^n$  comportant moins de cartes que celui qui vient d'être construit ?
2.  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \{\text{droites de } \mathbb{R}^{n+1}\} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*$ , est une variété de dimension  $n$ .  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  est recouvert par les  $n + 1$  ouverts  $U_k = \{[x_0 : \dots : x_n] : x_k \neq 0\}$  ( $0 \leq k \leq n$ ), où  $[x_0 : \dots : x_n]$  désigne la classe d'équivalence de (c'est-à-dire la droite engendrée par)  $(x_0, \dots, x_n)$ , et les cartes

$$\varphi_k : (x_0, \dots, x_n) \rightarrow \left( \frac{x_1}{x_k}, \dots, \frac{x_{k-1}}{x_k}, \frac{x_{k+1}}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k} \right).$$

Vérifier que les cartes sont compatibles.

*Remarque :*  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ , l'ensemble des droites du plan, s'identifie au cercle  $\mathbb{S}^1$ , il suffit de multiplier les angles par 2. Par contre  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  ne s'identifie pas à  $\mathbb{S}^2$ , on peut voir  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  comme un hémisphère dont on identifie les points diamétralement opposés sur l'équateur.

Vérifier qu'on définirait de même les variétés complexes  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$ .

### 1.1.2. Applications $\mathcal{C}^\infty$ .

On peut étendre la notion d'applications  $\mathcal{C}^\infty$  ou holomorphes à des variétés en regardant l'expression de l'application dans les coordonnées locales données sur toute carte de l'atlas. En d'autres termes, on considère que les applications de coordonnées locales sont des difféomorphismes locaux, et que les théorèmes de composition restent valides dans ce contexte.

**DÉFINITION 1.3.** — Soient  $M$  et  $N$  deux variétés de dimension  $m$  et  $n$ , munies d'atlas respectifs  $\phi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$ .

Une application  $f$  de  $M$  dans  $N$  est dite  $\mathcal{C}^\infty$  si et seulement si les applications  $\varphi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  lorsqu'elles ont un sens (rappelons que ces applications sont définies d'un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ).

Une bijection  $f$  entre  $M$  et  $N$  est un difféomorphisme  $\mathcal{C}^\infty$  si  $f$  et  $f^{-1}$  sont des applications  $\mathcal{C}^\infty$ . En particulier, s'il existe un difféomorphisme entre  $M$  et  $N$  alors  $m = n$ .

On note  $\mathcal{C}^\infty(M, N)$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty(M)$ ) l'ensemble des applications  $\mathcal{C}^\infty$  de  $M$  à valeur dans  $N$  (resp.  $\mathbb{R}$ ).

Si  $M$  et  $N$  sont des variétés complexes, on définira de même les applications holomorphes entre  $M$  et  $N$ . On notera  $\text{Hol}(M, N)$  (resp.  $\text{Hol}(M)$ ) l'ensemble des applications holomorphes de  $M$  vers  $N$  (resp.  $\mathbb{C}$ ).

On vérifie que deux atlas sont compatibles si et seulement si l'application identité est un difféomorphisme de  $M$  muni d'un des deux atlas sur elle-même muni de l'autre.

**1.1.2.1. Expressions en coordonnées locales.** — Si on se donne une application  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , et un atlas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  sur  $M$ , on a une collection d'applications  $f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$  qui vérifient

$$f_\alpha = f_\beta \circ \varphi_{\alpha\beta} \text{ si } U_{\alpha\beta} \neq \emptyset. \quad (1)$$

Réciproquement, la donnée d'une collection d'applications  $(f_\alpha)$  vérifiant les conditions (1) détermine de façon unique une application de  $M$  dans  $\mathbb{R}$ .

*Exemples :*

1.

$$f : \begin{cases} \mathbb{S}^2 & \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \\ x & \rightarrow [x] \end{cases}$$

est  $\mathcal{C}^\infty$ , localement inversible, mais pas globalement inversible (puisque deux points diamétralement opposés de la sphère définissent la même droite). Par exemple, on a :

$$\varphi_2 \circ f \circ (\varphi_1^+)^{-1}(x, y) = \varphi_2(f(\sqrt{1-x^2-y^2}, x, y)) = \left(\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

qui est bien  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $x^2 + y^2 < 1, x \neq 0$ .

2. Toute application méromorphe sur  $\mathbb{C}$  définit une application holomorphe de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . En effet, si  $F$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , elle s'écrit comme le quotient de deux applications holomorphes sur  $\mathbb{C}$  :  $F = \frac{f}{g}$  qui ne s'annulent pas simultanément. L'application

$$\tilde{F} : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \\ x & \mapsto [f(x) : g(x)] \end{cases}$$

est donc bien définie. On a évidemment (avec les notations de la page 6)  $\varphi_1 \circ \tilde{F} = F$  pour les points d'image finie par  $F$ . Vérifier que réciproquement la donnée d'une application de  $\text{Hol}(\mathbb{C}, \mathbb{C}\mathbb{P}^1)$  est équivalente à celle d'une fonction méromorphe.

Exercices :

1. En identifiant habilement les 2 cartes de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  et celles de  $\mathbb{S}^2$  (projections stéréographiques), construire un difféomorphisme, et une application biholomorphe entre ces deux variétés.
2. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles  $GL_n(\mathbb{R})$  est une variété. Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  et :

$$f_A : G \rightarrow f_A(G) = G^{-1}AG$$

montrer que  $f_A$  est  $\mathcal{C}^\infty$  de  $GL_n(\mathbb{R})$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

3. Montrer que tous les tores  $\mathbb{T}^n$  sont difféomorphes entre eux, mais qu'il y a une infinité de structures complexes sur chaque tore réel de dimension paire. [Indication : les applications holomorphes sont conformes.]

## 1.2. Fibré tangent

### 1.2.1. Espace tangent.

On va donner une définition abstraite de l'espace tangent à une variété en commençant par interpréter les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  comme des dérivations de fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  dans un voisinage de  $m \in \mathbb{R}^n$  et soit  $v \in \mathbb{R}^n$  un vecteur, on leur associe la dérivée de  $f$  selon  $v$  en  $m$  :

$$v(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(m + tv) - f(m)}{t},$$

soit, en coordonnées locales :

$$v(f) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(m) = d_m f(v).$$

On peut voir l'action de  $v$  comme celle d'une fonctionnelle (que l'on note encore  $v$ ) de  $f$  (en fait sur les germes de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  au point  $m$ ), qui vérifie les propriétés de linéarité et de Leibniz (au point  $m$ ) :

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g) \quad (2)$$

$$v(fg) = f(m)v(g) + g(m)v(f). \quad (3)$$

On appelle *dérivation* une telle fonctionnelle. Réciproquement, si une dérivation  $\varphi$  vérifie les propriétés (2) et (3), alors montrons que  $\varphi$  s'interprète comme l'action d'un vecteur  $v$ .

On observe d'abord que  $\varphi(1^2) = 2\varphi(1)$  donc  $\varphi(1) = 0$  puis par linéarité  $\varphi$  est nulle sur les constantes. Soit maintenant  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  dans un voisinage  $V = B(m_0, \varepsilon)$  de  $m_0 \in \mathbb{R}^n$ , posons pour  $m \in V$  :

$$g(t) = f(m_0 + t(m - m_0)).$$

La fonction  $g$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0,1]$ , donc

$$\begin{aligned} f(m) = g(1) &= g(0) + \int_0^1 g'(t) dt \\ &= f(m_0) + \sum_{i=1}^n (m - m_0)_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0 + t(m - m_0)) dt. \end{aligned}$$

Donc, par linéarité et en appliquant Leibniz :

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^n \varphi((m - m_0)_i) \left\{ \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0 + t(m - m_0)) dt \right\}_{|m=m_0}.$$

Finalement :

$$\varphi(f)(m_0) = \sum_{i=1}^n \varphi(m_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0) = v(f),$$

où  $v$  a pour coordonnées  $\varphi(m_i)$  dans la base canonique.

**1.2.1.1. Notation.** — On note  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique. Ce qui se justifie par le fait que

$$v = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \Rightarrow v(f) = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(m).$$

Revenons maintenant au cas d'une variété quelconque. On note  $\mathcal{C}_m^\infty(M)$  l'ensemble des fonctions<sup>2</sup> de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont  $\mathcal{C}^\infty$  sur un voisinage de  $m$ .

**DÉFINITION 1.4.** — *L'espace tangent  $T_m M$  en un point  $m$  de  $M$  est l'ensemble des dérivations au point  $m$  sur  $\mathcal{C}_m^\infty(M)$ .*

**PROPOSITION 1.5.** —  *$T_m M$  est un espace vectoriel de dimension  $n = \dim M$ . De plus le fibré tangent  $TM = \cup_{m \in M} \{m\} \times T_m M$ , est muni canoniquement d'une structure de variété de dimension  $2n$ .*

*Remarque.* — L'identification entre vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et dérivations sur  $\mathcal{C}_{m_0}^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui vient d'être discutée revient à identifier canoniquement  $T_{m_0} \mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^n$  en tout point  $m_0$ .

*Démonstration.* — Les dérivations étant des formes linéaires sur  $\mathcal{C}_m^\infty(M)$ , elles héritent des lois d'espace vectoriel correspondantes. Il suffit de voir que la condition de Leibniz (3) est préservée par combinaison linéaire. Considérons la carte  $(U, x)$  de  $M$  avec  $m \in U$ , à valeurs dans l'ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ . On peut lui associer l'application  $x_* : T_m M \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui applique  $v$  sur :

$$x_*(v) : \begin{cases} \mathcal{C}_{x(m)}^\infty(\mathbb{R}^n) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \rightarrow x_*(v)(f) = v(f \circ x). \end{cases}$$

On observe que  $x_*$  est un isomorphisme entre  $T_m M$  et  $T_{x(m)} \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$  car  $x$  fournit une identification entre  $\mathcal{C}_m^\infty(M)$  et  $\mathcal{C}_{x(m)}^\infty(\mathbb{R}^n)$  (par définition même des applications  $\mathcal{C}^\infty$  sur une variété :

2. Plus rigoureusement, on préférerait parler de l'espace des germes de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $M$  au point  $m$  : ce sont les classes d'équivalence de couples  $(U, f)$  où  $U$  est un voisinage ouvert de  $m$ , et  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  ; avec la relation  $(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow \exists W \subset U \cap V : f|_W = g|_W$ .

définition 1.3). Donc  $\dim T_m M = n$ . À la carte  $x$  est associée canoniquement une base de  $T_m M$  dont le  $i$ -ème vecteur est  $(x_*)^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i})$ . Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on note encore cette base  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ . Ceci est justifié par le fait que pour les fonctions coordonnées  $x_i$  la valeur de  $v(x_i)$  est  $v_i$  si  $v = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ . On peut d'ailleurs exprimer  $x_*$  en coordonnées par :

$$x_* : v \rightarrow (v(x_1), \dots, v(x_n)).$$

*Structure de variété sur  $TM$*  : À tout couple  $(m, v)$  de  $TM$ , on associe :

$$Tx(m, v) = (x(m), x_*(v)),$$

$Tx$  définit une application de coordonnées locales sur les couples  $(m, v)$  pour  $m \in U, v \in T_m M$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Ces ouverts recouvrent entièrement  $TM$ , l'union disjointe de tous les espaces tangents. Montrons que les changements de cartes sont  $\mathcal{C}^\infty$ , ce qui achèvera de démontrer la proposition. On considère maintenant deux cartes  $x$  et  $y$  définies simultanément sur un ouvert  $U$  de  $M$ . On se donne donc  $(x_m, \alpha)$  dans l'image de  $Tx$  et on calcule  $Ty \circ Tx^{-1}(x_m, \alpha) = (y_m, \beta)$ . Notons  $(m, v) = (Tx)^{-1}(x_m, \alpha)$ , donc  $m = x^{-1}(x_m)$  et :

$$Ty \circ Tx^{-1}(x_m, \alpha) = ((y \circ x^{-1})(x_m), v(y_1), \dots, v(y_n)).$$

Comme  $M$  est une variété, il est clair que  $y \circ x^{-1}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  en  $x_m$ . Il reste à exprimer les  $\beta_k = v(y_k)$  en fonction des  $\alpha_i = v(x_i)$ . Pour  $m \in M$  voisin de  $m_0$  d'image  $x_m$  par la carte  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} y_k(m) - y_k(m_0) &= (y \circ x^{-1})_k(x_m) - (y \circ x^{-1})_k(x_{m_0}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_m - x_{m_0})_i \int_0^1 \frac{\partial (y \circ x^{-1})_k}{\partial x_i}((1-t)x_m + tx_{m_0}) dt. \end{aligned}$$

Donc :

$$\beta_k = v(y_k) = \sum_{i=1}^n v(x_i) \frac{\partial (y \circ x^{-1})_k}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \alpha_i.$$

Finalement  $\beta_k = v(y_k)$  est une combinaison linéaire à coefficients  $\mathcal{C}^\infty$  des  $\alpha_i$ , la matrice de l'application linéaire qui permet de passer du vecteur  $\alpha$  au vecteur  $\beta$  est la matrice :

$$\frac{Dy}{Dx} = \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right)_{ik} \quad (4)$$

qui est inversible car  $x \rightarrow y(x)$  est un difféomorphisme  $\mathcal{C}^\infty$ .

Si  $v$  a pour coordonnées  $\alpha$  dans la base  $\partial/\partial x_j$  et  $\beta$  dans la base  $\partial/\partial y_j$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont reliés par la formule (4) donc en faisant  $\alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (i.e.  $\alpha_i = \delta_{ij}$  pour  $i \in [1, n]$ ), on obtient :

$$\beta_k = \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k}. \quad (5)$$

*Remarque.* — Lorsque la variété est représentée comme sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ , on peut également voir un vecteur tangent à  $M$  comme la dérivée d'une courbe sur  $M$  en un point  $m$ . L'action sur les fonctions est alors évidente (on dérive la restriction de la fonction à la courbe), mais la structure d'espace vectoriel est un peu moins naturelle.

*Exemple.* — Les groupes classiques de matrices (inversibles, orthogonales, unitaires) ont des structures de variété, ce sont d'ailleurs des sous-variétés de  $\mathbb{R}^{n^2}$  ou  $\mathbb{C}^{n^2}$ . Les espaces tangents en l'identité sont alors respectivement toutes les matrices, les matrices antisymétriques et les matrices antihermitiennes. La structure de groupe permet d'identifier les espaces tangents en d'autres matrices avec ces espaces vectoriels de matrices.

DÉFINITION 1.6. — Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés, soit  $f : X \rightarrow Y$  une application  $\mathcal{C}^\infty$  dans un voisinage de  $x \in X$  et soit  $y = f(x)$ . On définit l'application linéaire tangente à  $f$  en  $x$  :  $T_x f : T_x X \rightarrow T_y Y$  en posant pour  $v \in T_x X$  et  $g \in \mathcal{C}_y^\infty(Y) : (T_x f(v))(g) = v(g \circ f)$ .

On vérifie en effet aisément que  $T_x f(v) \in T_y Y$ .

PROPOSITION 1.7. —  $T_x f$  est une application linéaire de  $T_x X$  dans  $T_y Y$ . Lorsque  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  de  $X \rightarrow Y$ , on peut définir l'application tangente  $Tf : TX \rightarrow TY$  par :

$$Tf : (x, v) \in TX \rightarrow (f(x), T_x f(v)) \in TY.$$

La linéarité est évidente et le caractère  $\mathcal{C}^\infty$  se montre en coordonnées locales. Signalons la propriété suivante qui résulte trivialement de la définition.

PROPOSITION 1.8. — Si  $X, Y$  et  $Z$  sont trois variétés, et  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  deux applications  $\mathcal{C}^\infty$ , on a :

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_x f.$$

*Exemple.* — L'application  $f_A$  définie sur  $GL_n(\mathbb{R})$  par  $f_A(G) = G^{-1}AG$  admet pour application tangente en  $G$  :

$$T_G f_A(M) = G^{-1}AM - G^{-1}MG^{-1}AG.$$

DÉFINITION 1.9. — Lorsque  $Y = \mathbb{R}$  c'est-à-dire lorsque  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , la composante linéaire de  $Tf$  se note  $df$  et est appelée différentielle de  $f$ .

*Remarque.* — Il faut garder à l'esprit que l'espace tangent en  $m$  dépend du point  $m$ . Il est donc en général impossible d'isoler la composante linéaire de l'application linéaire tangente. Dans le cas de  $\mathbb{R}$ , l'espace tangent ne dépend pas du point, ce qui permet de définir la différentielle : ce serait possible plus généralement si  $Y = \mathbb{R}^n$  ou même si  $TY$  est un fibré trivial (cf. section 1.3).

*Exercices :*

1. Retrouver les deux propriétés bien connues du calcul différentiel usuel : une application dont la différentielle est identiquement nulle est localement constante ; la différentielle s'annule en un point ou  $f$  admet un extremum.
2. Si  $\varphi : V \rightarrow U \subset M$  est une paramétrisation, montrer que  $T_x \varphi$  est surjective sur  $T_\varphi(x)M$  pour tout  $x$ .
3. Si  $f$  est une application  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , constante sur une variété  $M \subset \mathbb{R}^n$ , montrer que  $TM \subset \ker df$ .

### 1.2.2. Espace cotangent.

Soit  $m \in M$ . On définit<sup>3</sup> l'espace cotangent en  $m$  à  $M$  :

$$T_m^*M = \{d_m f, f \in \mathcal{C}_m^\infty(M)\}.$$

C'est également le dual de  $T_mM$  car toute forme linéaire de  $T_mM$  est la différentielle d'une fonction  $\mathcal{C}_m^\infty(M)$  (il suffit de le montrer en coordonnées locales, et dans le cas d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , il suffit de prendre pour  $f$  la forme linéaire elle-même).

**PROPOSITION 1.10.** —  $T_m^*M$  est un espace vectoriel de dimension  $n = \dim M$ . De plus  $T^*M = \cup_{m \in M} \{m\} \times T_m^*M$ , le fibré cotangent de  $M$ , est muni canoniquement d'une structure de variété de dimension  $2n$ .

*Remarque.* — Si  $f$  est à valeurs complexes, sa différentielle  $d_m f$  a un sens en tant que qu'élément de  $T_m^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . Si l'on décompose  $f$  en parties réelle et imaginaire, la différentielle « complexifiée » se décompose de la façon correspondante.

*Démonstration.* — Soit  $(U, x)$  une carte de  $M$  contenant  $m$ . On en déduit une carte dite carte naturelle de  $T^*M$  définie sur  $\cup_{m \in U} \{m\} \times T_m^*M$  :

$$T^*x : (m, d_m f) \in T^*M \mapsto (x(m), d_m f \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)) = (x(m), d_{x(m)}(f \circ x^{-1})).$$

Il reste à vérifier que deux cartes naturelles sont  $\mathcal{C}^\infty$  compatibles sur leur domaine commun de définition. Soit donc  $y$  une autre carte de  $M$  et déterminons  $T^*y \circ (T^*x)^{-1}$ . Soit  $(x(m), \alpha) \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $(m, d_m f)$  son image réciproque par  $T^*x$ , et  $(y(m), \beta)$  l'image de  $(m, d_m f)$  par  $T^*y$ . On a :

$$y(m) = (y \circ x^{-1})(x(m)), \quad \beta = (d_m f \left( \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right)).$$

Comme les cartes  $x$  et  $y$  sont compatibles,  $y \circ x^{-1}$  est  $\mathcal{C}^\infty$ . Il reste à exprimer  $\beta$  de manière  $\mathcal{C}^\infty$  en fonction de  $\alpha$  et de  $x(m)$ . Pour cela, on utilise la linéarité de  $d_m f$  et le changement de carte pour un vecteur tangent (5) :

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

d'où l'on tire :

$$\beta_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \alpha_k$$

ou encore :

$$\beta = {}^t \left( \frac{Dy}{Dx} \right)^{-1} (x) \cdot \alpha$$

qui est bien une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\alpha$  et de  $m$ .

3. Il existe une définition plus algébrique du cotangent  $T_m^*M$ . Notons  $\mathcal{C}_{m,0}^\infty(M)$  l'espace des germes de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  en  $m$  qui s'annulent en  $m$ . C'est l'idéal maximal de  $\mathcal{C}_m^\infty(M)$ . Son carré est l'espace des germes dont la dérivée s'annule en  $m$  (à cause de la relation (3)). Le quotient  $\mathcal{C}_{m,0}^\infty(M) / (\mathcal{C}_{m,0}^\infty(M))^2$  s'identifie donc naturellement aux développements de Taylor à l'ordre 1 des germes de  $\mathcal{C}_{m,0}^\infty(M)$ , donc à l'espace  $T_m^*M$  que nous avons défini. Cette définition-ci a l'avantage de conserver un sens dans un contexte où la différentielle n'est pas bien définie. Le tangent en  $m$  est alors défini comme l'espace vectoriel dual.

*Exercice.* — Nous avons donc donné un sens bien précis aux notations  $dx_i$  et  $\partial/\partial x_i$  sur un ouvert de cartes : la première signifie la différentielle de l'application de  $i$ -ème coordonnée locale, tandis que la seconde s'interprète comme un vecteur tangent en  $m$ . Justifier la relation suivante :

$$d_m f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f dx_i. \quad (6)$$

En particulier, montrer que la base duale de  $\partial/\partial x_i$  est donnée par les  $dx_i$ , et qu'on retrouve la « dérivée partielle » de  $f$  sous cette forme :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = d_m f \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f.$$

### 1.2.3. Dualité tangent-cotangent.

Par définition de  $d f$  on a  $d_x f(v) = v(f)$ , ce qui définit<sup>4</sup> la dualité entre  $TM$  et  $T^*M$ .

En général, il n'y a pas d'isomorphisme canonique entre  $TX$  et  $T^*X$ . Il est nécessaire de disposer d'une donnée supplémentaire qui est une forme bilinéaire non dégénérée sur  $T_x X$  (par exemple une forme symétrique dans le cas des variétés riemanniennes ou une forme antisymétrique pour une variété symplectique).

On a vu qu'étant donnée une application  $\varphi : X \rightarrow Y$ , on peut définir  $T_x \varphi : T_x X \rightarrow T_y Y$ . Par dualité, on peut définir  $T_y^* \varphi : T_y^* Y \rightarrow T_x^* X$  : si  $d_y f \in T_y^* Y$ , on pose

$$T_y^* \varphi(d_y f) = d_x(f \circ \varphi).$$

On vérifie que  $T_x \varphi$  et  $T_y^* \varphi$  sont bien duales l'une de l'autre : si  $v \in T_x X$ ,

$$[T_y^* \varphi(d_y f)](v) = d_x(f \circ \varphi)(v) = v(f \circ \varphi) = T_x \varphi(v)(f) = d_y f[T_x \varphi(v)]. \quad (7)$$

Mais il n'est pas possible de définir une application  $T^* \varphi : T^* Y \rightarrow T^* X$  en général car si  $y \in Y$ , on ne sait pas s'il admet un antécédent unique par  $\varphi$ . Lorsque  $\varphi$  est injective, on peut définir  $T^* \varphi$  sur

$$T^* Y = \cup_{y \in \varphi(X)} \{y\} \times T_y^* Y.$$

### 1.2.4. Sous-variétés.

**DÉFINITION 1.11.** — Soit  $M$  une variété de dimension  $n$ . On dit que  $N$  est une sous-variété de  $M$  si on peut choisir un atlas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  de  $M$  tel que pour tout ouvert de carte  $U_\alpha$  l'image de  $N \cap U_\alpha$  par  $\varphi_\alpha$  soit l'intersection d'un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  avec  $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha$ . En d'autres termes, il existe pour tout point  $p \in N$  un ouvert de carte  $U \subset M$  contenant  $p$  et des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  sur  $U$  telles que  $N \cap U$  soit donné par l'équation  $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$ .

*Exemples :*

1. Tout ouvert d'une variété  $M$  est une sous-variété de  $M$  de même dimension (prendre  $m = n$  dans la définition ci-dessus!).

<sup>4</sup> Le second membre ne dépend que de  $d_y f$  car  $f$  est déterminée à une constante près,  $v$  étant une dérivation, elle annule la constante. Cette observation est utilisée dans tous les calculs qui suivent.

2. la sphère  $\mathbb{S}^n$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On prend comme carte de  $\mathbb{R}^{n+1}$  sur l'ouvert :

$$U_i^\pm = \{\pm x_\alpha > 0 : \sum_{j \neq i} x_j^2 < 1\}$$

la fonction :

$$\varphi_i^\pm(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \mp \sqrt{1 - \sum_{j \neq i} x_j^2}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

et sur  $U_0 = \{||x||^2 \neq 1\}$  on prend la carte identité. On recouvre bien  $\mathbb{R}^{n+1}$  et l'image par  $\varphi_i^\pm$  de  $U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n$  est :

$$(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}) \cap \varphi_i^\pm(U_i^\pm).$$

*Remarque.* — La dimension de l'espace affine est indépendante du point de la sous-variété considéré, elle dépend uniquement de la composante connexe. En effet, la dimension est localement constante, car si on change de carte, les deux cartes permettent d'obtenir un difféomorphisme entre deux espaces affines qui ont donc même dimension. Donc une sous-variété d'une variété est une variété de dimension la dimension de l'espace affine.

Si on se donne deux variétés  $M$  et  $M'$  de dimensions  $m$  et  $m'$ , le produit cartésien  $M \times M'$  est encore une variété de dimension  $m + m'$  ( $M$  est alors une sous-variété de  $M \times M'$ ). On peut ainsi construire de nombreuses variétés. L'énoncé suivant permet de fabriquer la plupart des exemples courants :

**THÉORÈME 1.12.** — Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Si la différentielle de  $f$  est surjective, alors ses fibres  $X_b = f^{-1}(b)$  non vides sont des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ . On dit dans ce cas que  $f$  est une submersion.

Si la différentielle de  $f$  est injective (auquel cas on dira que  $f$  est une immersion) et  $f$  est ouverte sur son image, alors l'image  $f(U)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^p$ . On dira que  $U$  est plongée dans  $\mathbb{R}^p$  :  $f$  réalise alors un plongement.

*Démonstration.* — La première propriété est une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites. En effet, l'hypothèse nous dit que, le long de  $X_b$ , la différentielle de  $f$  est de rang  $p$  : il y a donc au voisinage de chaque point de  $X_b$   $p$  dérivées partielles de  $f$  linéairement indépendantes. Grâce au théorème des fonctions implicites, on peut alors écrire les  $p$  coordonnées correspondantes comme fonction des  $n - p$  restantes, ce qui revient à paramétrer cet ouvert par un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-p}$ . Sur un ouvert où deux systèmes de coordonnées « implicites » existent, le théorème des fonctions implicite permet de voir chaque coordonnée comme fonction  $\mathcal{C}^\infty$  des  $n - p$  choisies pour le paramétrer : il est par conséquent évident que le changement de carte est  $\mathcal{C}^\infty$ . Maintenant, quitte à renuméroter les  $f_i$ , on peut définir l'application

$$F : \quad \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) \quad \mapsto \quad (x_1, \dots, x_{n-p}, f_1((x_1, \dots, x_n)) - b_1, \dots, f_p((x_1, \dots, x_n)) - b_p)$$

qui est un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^n$  car sa différentielle ne s'annule nulle part.  $F$  définit donc une carte sur chaque ouvert où elle est injective, et dans les coordonnées  $(y_1, \dots, y_n)$  correspondantes, on a bien que  $M$  est donnée par les équations  $y_{n-p+1} = \dots = y_n = 0$ .

La deuxième propriété est plus simple : si  $d_x f$  est injective, on peut compléter le système libre  $(d_x f_1, \dots, d_x f_n)$  en une base de  $T_x^* \mathbb{R}^p$  (l'hypothèse implique  $p \geq n$ ). Pour ce faire, on utilisera  $p - n$  combinaisons linéaires  $d f_{n+1}, \dots, d f_p$  des  $d x_i, i = 1, \dots, p$  qui s'étendent naturellement en différentielles au voisinage de  $x$ . Si  $f$  est ouverte sur son image,  $f(\mathbb{R}^n)$  est localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , d'autre part, le théorème d'inversion locale appliqué à  $(f_1, \dots, f_p)$  nous permet d'affirmer que la fonction  $\hat{f}$  ainsi définie est une carte sur  $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-n}$ . Dans les coordonnées locales induites sur  $\mathbb{R}^p$ , on aura  $f(\mathbb{R}^n)$  donné par les équations  $f_{n+1} = \dots = f_p = 0$ .  $\square$

Par exemple, le cercle est une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$  comme image réciproque de 1 par :

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Par contre, le dessin à gauche de la figure 1 ne peut être une ligne de niveau d'une fonction de rang constant car on aurait nécessairement  $df = 0$  au point double ( $f$  serait constante dans deux directions indépendantes en  $p$ ) : un exemple simple de ce phénomène est donné par la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 - y^2.$$

Le théorème de plongement de Whitney [Die70, Problème 2, p. 182] affirme en outre que toute variété de dimension  $n$  peut être vue comme une sous-variété de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Le théorème qui suit généralise les deux énoncés précédents.

**THÉORÈME 1.13 (du rang constant).** — *Si  $X, Y$  sont deux variétés et  $f : X \rightarrow Y$ , on appelle rang de  $f$  en  $x \in X$  le rang de l'application (linéaire)  $T_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ . Alors, si  $f$  est de rang constant, ses fibres  $X_y = f^{-1}(y)$  non vides sont des sous-variétés de  $X$ .*

*De plus, si  $f$  est ouverte sur son image,  $f(X)$  est une sous-variété de  $Y$ .*

Le cas où  $f$  est de rang maximal se réduit facilement au théorème 1.12. Voir [Die70, (16.8.8), p.42] ou [Mal72, p. 58] pour une démonstration du cas général.

Soit  $M$  une sous-variété de  $N$ . Alors  $TM$  est canoniquement une sous-variété de  $TN$ , en effet si  $v \in T_m M$ , on peut le voir comme un vecteur de  $T_m N$  en définissant son action sur  $f \in \mathcal{C}_m^\infty(N)$  par restriction :  $v(f|_M)$ . Si  $x$  est une carte de  $N$  dans laquelle  $M$  a pour équation  $x_1 = \dots = x_k = 0$  alors  $Tx$  est une carte de  $TN$  dans laquelle  $TM$  a pour équations  $x_1 = \dots = x_k = v_1 = \dots = v_k = 0$  où  $(v_k)$  désigne les coordonnées de  $v$  dans la base  $(\partial/\partial x_k)$ .

*Exemple.* — Considérons  $\mathbb{S}^2$  et un point  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$  situé dans l'ouvert de la carte :

$$\varphi_1^+ : (x, y, z) \rightarrow (x - \sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z).$$

Soit  $v$  un vecteur de  $T_{(x, y, z)} \mathbb{R}^3$ , alors  $v \in T_{(x, y, z)} \mathbb{S}^2$  si  $v(x - \sqrt{1 - y^2 - z^2}) = 0$  donc si :

$$v_x + v_y \frac{y}{\sqrt{1 - y^2 - z^2}} + v_z \frac{z}{\sqrt{1 - y^2 - z^2}} = 0$$

où  $(v_x, v_y, v_z)$  désignent les coordonnées de  $v$  dans la base canonique  $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ . Finalement  $v \in T_{(x, y, z)} M$  si :

$$xv_x + yv_y + zv_z = 0$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$df(v) = 0$$

où  $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$  est la fonction de rang constant au voisinage de  $\mathbb{S}^2$ , telle que  $\mathbb{S}^2 = f^{-1}(1)$ .

Ce fait est général : si  $f$  est une application de rang constant (c.f. le théorème 1.13), et si  $m \in f^{-1}(b)$  alors  $T_m X_b = \ker d_m f$  (voir la proposition 1.20 pour le cas de rang maximal, et [Die70, (16.8.8), p.42] pour le cas général). On peut replacer les observations de cette section dans le contexte plus adapté des fibrés vectoriels et de leurs morphismes. C'est ce que nous présenterons dans la section suivante.

### 1.2.5. Variétés à bord.

Les variétés  $\mathcal{C}^\infty$  sont le contexte naturel pour le calcul différentiel. On a cependant souvent besoin d'avoir des informations sur leur *bord* pour des problèmes d'intégration ou de régularité. Par exemple un ouvert borné dans une variété est une sous-variété, mais son bord (au sens topologique, i.e. sa frontière) n'est a priori qu'un espace topologique fermé. La notion de variété à bord permet de préciser la régularité du bord. Accessoirement, on s'aperçoit ici que le recours à la géométrie différentielle est inévitable, même du strict point de vue de l'analyse dans  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  car le bord d'un ouvert d'un espace affine n'a aucune raison d'être (difféomorphe à) un ouvert d'un autre espace affine.

On définit une variété à bord selon le même principe que pour une variété sans bord, mais l'espace modèle est maintenant un demi espace de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}$ . On dit qu'une application de  $\mathbb{H}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  est  $\mathcal{C}^\infty$  si elle admet un prolongement  $\mathcal{C}^\infty$  à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $\mathbb{H}^n$ .

**DÉFINITION 1.14.** — *Un espace topologique séparé  $M$  est une variété à bord  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$  s'il existe une collection  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  où, pour chaque  $\alpha$ ,  $U_\alpha$  est un ouvert (leur union recouvre  $M$ ),  $\varphi_\alpha$  un homéomorphisme de  $U_\alpha$  sur un ouvert  $V_\alpha$  de  $\mathbb{H}^n$  telle que les changements de cartes  $\varphi_{\alpha\beta} = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})|_{\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})}$  et leurs réciproques  $\varphi_{\beta\alpha}$  soient  $\mathcal{C}^\infty$  au sens ci-dessus.*

*On dit qu'un point de  $M$  est intérieur s'il est contenu dans un ouvert de  $M$  dont l'image par une application de carte est un ouvert pour la topologie de  $\mathbb{R}^n$ . Le bord de  $M$  est le complémentaire, dans  $M$ , des points intérieurs. On le note  $\partial M$  (parfois aussi  $bM$  dans une certaine presse).*

Le tangent à  $M$  est défini en tout point (y compris ceux du bord) par la remarque que les paramétrisations  $\varphi_\alpha^{-1}$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  donc s'étendent au voisinage des points de  $\mathbb{H}^n$ , et  $\varphi_\alpha^{-1} \circ (T_x \mathbb{H}^n) \simeq \varphi_\alpha^{-1} \circ (\mathbb{R}^n)$  est donc bien défini. (Une autre façon de dire la même chose est de remarquer que la jacobienne d'une application différentiable est déterminée par l'image de deux directions indépendantes, et qu'on dispose de ceci, même au bord d'un demi espace.)

*Remarque.* — Une variété au sens de la définition 1.2 sera désormais dite variété sans bord. C'est un cas particulier de variété à bord dont le bord est vide (un ouvert de  $\mathbb{H}^n$  peut très bien être simultanément un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ).

Les propriétés suivantes résultent de la définition :

PROPOSITION 1.15. — Si  $M$  est une variété à bord de dimension  $n$ , l'ensemble de ses points intérieurs a une structure naturelle de variété (sans bord)  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$ . Le bord  $\partial M$  a quant à lui une structure naturelle de variété de dimension  $n - 1$  s'il n'est pas vide.

Pour des raisons topologiques évidentes le bord de  $M$  est constitué des points qui s'envoient par les  $\varphi_\alpha$  dans le « bord »  $\{x_1 = 0\}$  de  $H^n$ . Il est par suite évident que la restriction des  $\varphi_\alpha$  à l'intérieur de  $M$  définit un atlas sur  $M \setminus \partial M$ . Les  $\varphi_\alpha$  définissent par restriction à  $\partial M$  des cartes sur des ouverts de  $\{x_1 = 0\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ . Les  $\varphi_{\alpha\beta}$  induisent alors des difféomorphismes dans ces restrictions.

La proposition suivante fournit les exemples usuels de variétés à bord :

PROPOSITION 1.16. — Si  $M$  est une variété  $\mathcal{C}^\infty$  (sans bord) de dimension  $n$ , et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $\mathcal{C}^\infty$  dont la différentielle ne s'annule pas le long du lieu de ses zéros, alors  $M_{\leq 0} = \{x \in M : f(x) \leq 0\}$  est une variété à bord de dimension  $n$ .

Le fait que  $\partial(M_{\leq 0}) = \{x \in M : f(x) = 0\}$  est une variété de dimension  $n - 1$  est une conséquence du théorème 1.12. La démonstration en est identique, à ceci près qu'il faut remplacer une égalité par une inégalité.

*Remarque.* — Toute variété à bord est définie localement comme ceci car les cartes fournissent des coordonnées locales pour lesquelles  $M \cap U_\alpha \simeq \{x_1 \leq 0\}$ .

*Exemple.* — La boule unité de  $\mathbb{R}^n$  est le premier exemple qui vient à l'esprit. Attention, il n'y a pas de notion *holomorphe* correspondante ! (le bord d'une variété de dimension *réelle*  $n$  est de dimension *réelle*  $n - 1$ , donc l'intérieur et le bord ne peuvent être simultanément des variétés complexes. L'étude du bord des variétés complexes a donné lieu à la théorie des variétés CR dont il sera un peu question au cours de cette école.

### 1.3. Fibrés vectoriels

#### 1.3.1. Définition.

La proposition 1.5 nous a permis de munir la collection de tous les espaces tangents à une variété d'une structure de variété. Cette structure n'est pas quelconque, puisqu'elle tient compte de la structure d'espace vectoriel de chaque  $T_m M$ , et la préserve : les changements de cartes ont la forme  $T_{x(m)} y \circ x^{-1}$ , ils sont donc linéaires lorsque l'on fixe le point de  $M$ . Voici la définition d'un fibré vectoriel, qui est un cas particulier d'une fibration localement triviale.

DÉFINITION 1.17. — Soit  $M$  une variété  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$ . Un fibré vectoriel  $E$  de rang  $r$  au dessus de  $M$  est la donnée du triplet  $(E, M, \pi)$  où  $E$  est une variété  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n + r$ ,  $\pi : E \rightarrow M$  une application  $\mathcal{C}^\infty$  surjective dont les fibres  $E_b = \pi^{-1}(b)$  admettent une structure d'espace vectoriel (de dimension  $r$ ), et vérifiant la condition suivante : Pour tout  $m \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $m$  dans  $M$  et un difféomorphisme

$$\varphi : U \times \mathbb{R}^r \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

tel que  $\pi(\varphi(y, t)) = t$  quels que soient  $y \in U$ ,  $t \in \mathbb{R}^r$ , et que, pour tout  $y \in U$ , l'application partielle  $\varphi(y, \cdot)$  soit une bijection linéaire de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^r$  sur l'espace vectoriel  $E_y$ .  $\varphi$  est dite trivialisat[i]on locale de  $E$ .

Comme les applications partielles  $\varphi(y, \cdot)$  sont linéaires, il existe  $r$  applications  $\mathcal{C}^\infty$   $s_i : U \rightarrow E$  telles que  $\pi \circ s_i = \text{Id}_U$  pour tout  $i$  et  $\varphi(y, \xi_1, \dots, \xi_r) = \xi_1 s_1(y) + \dots + \xi_r s_r(y)$ . On appelle le  $r$ -uplet  $(s_1, \dots, s_r)$  un champ de repères de  $E$  sur  $U$ . Les applications  $s_i$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$  (en fait  $s_i(y) = \varphi(y, e_i)$  en notant  $e_i$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^r$ ).

*Notation.* — On appelle  $M$  la *base* du fibré  $E$ . Lorsque l'on souhaite souligner qu'on parle de  $E$  en tant que variété plutôt qu'en tant que collection d'espaces vectoriels au dessus de la base, on parle de l'*espace total* du fibré  $E$ . L'espace vectoriel  $E_x = \pi^{-1}(x)$  se nomme la *fibres* de  $E$  au dessus de  $x$ . On note  $E|_U = \pi^{-1}(U)$  la « restriction » de  $E$  à  $U$ . Un fibré est dit *trivial* s'il admet une trivialisatation globale, c'est-à-dire si l'on peut choisir  $U = M$  dans la définition ci-dessus.  $E|_U$  est donc trivial.

Si  $U_\alpha$  et  $U_\beta$  sont deux ouverts de trivialisatation pour  $E$ ,  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  les trivialisatations locales correspondantes, on obtient sur  $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta}$  une application  $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$  qui laisse les points de la base invariants. On en déduit pour tout  $y \in U_{\alpha\beta}$  un *automorphisme de transition*  $\tau_{\beta\alpha}(y)$  qui agit bijectivement et linéairement sur  $\mathbb{R}^r$  en écrivant  $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(y, \xi) = (y, \tau_{\beta\alpha} \cdot \xi)$ . Les applications  $\tau_{\beta\alpha}$  décrivent la façon dont on recolle les fibres d'une trivialisatation locale à l'autre. Pour être cohérentes, elles doivent vérifier la relation de cocycle  $\tau_{\gamma\beta} \circ \tau_{\beta\alpha} = \tau_{\gamma\alpha}$  sur les ouverts  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ . En fait, un fibré vectoriel  $E$  de rang  $r$  au dessus de  $M$  est équivalent à la donnée d'une collection d'ouverts de trivialisatation  $U_\alpha$  et à une collection d'automorphismes  $\tau_{\beta\alpha} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{R}^r)$  pour chaque couple  $\alpha, \beta$  tel que  $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$  qui vérifient la condition de cocycle<sup>5</sup>.

*Remarque.* — En remplaçant  $\mathcal{C}^\infty$  par holomorphe, et en prenant comme espace vectoriel de référence  $\mathbb{C}^r$ , on définit de même un fibré vectoriel holomorphe au dessus d'une variété complexe. La structure de variété holomorphe sur l'espace total du fibré est évidente dès que l'on remarque qu'une application linéaire est holomorphe si et seulement si elle est  $\mathbb{C}$ -linéaire.

*Exemples :*

1. Les variétés  $M \times \mathbb{R}^r$  sont des fibrés triviaux pour tout  $r$ . Le tangent à  $\mathbb{R}^n$  s'identifie naturellement au fibré trivial  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .
2. Les fibrés  $TM$  et  $T^*M$  sont triviaux sur les ouverts de carte de  $M$ . En effet, on peut reformuler la démonstration de la proposition 1.5 comme ceci : si  $\psi : V \rightarrow U \subset M$  est une paramétrisation d'un ouvert  $U$  de  $M$ , alors  $T\psi : TV \simeq T\mathbb{R}^n|_V \simeq V \times \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\psi(x)}M|_U$  est une trivialisatation de  $TM$  au dessus de  $U$ . On a de même que  $T^*\psi$  est une trivialisatation de  $T^*M|_U$  d'après la proposition 1.10.
3. Un fibré sur un ouvert contractile est toujours trivial. Un fibré sur  $\mathbb{S}^1$  est par conséquent trivial sur un ouvert omettant au plus un point de  $\mathbb{S}^1$ . Par exemple, le fibré tangent à  $\mathbb{S}^1$  est trivial (Ex. 2 ci-dessous), mais le fibré tangent à  $\mathbb{S}^2$  ne l'est pas. L'exercice 3 donne un exemple de fibré non trivial sur  $\mathbb{S}^1$ .

*Exercices :*

1. En utilisant un atlas de  $M$  et les trivialisatations locales de  $E$ , exhiber un atlas de  $E$ .
2. Montrer que le fibré tangent à  $\mathbb{T}^n$  est trivial.

<sup>5</sup> Ceci donne une identification entre les classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels sur  $M$  et la cohomologie de Čech du faisceau constant  $\text{Gl}(\mathbb{R}^r)$  sur  $M$  en degré 1.

3. On recouvre  $\mathbb{S}^1$  par les deux ouverts  $U_0$  et  $U_\pi$ . Comme  $U_0 \cap U_\pi$  est composé de deux composantes connexes, on peut définir un fibré en droites  $L$  sur  $\mathbb{S}^1$  trivial sur  $U_0$  et  $U_\pi$ , de telle sorte que les automorphismes de transition soient 1 sur une des composantes,  $-1$  sur l'autre (les automorphismes de  $\mathbb{R}$  sont les multiplications par une constante non nulle). Montrer que ce fibré n'est pas trivial. Montrer que l'espace total de ce fibré est difféomorphe à la bande de Möbius (telle que définie par [BG72, Exercice 5.9.11, p. 202]).

### 1.3.2. Sections, morphismes.

DÉFINITION 1.18. — Une section du fibré  $(E, M, \pi)$  est une application  $\mathcal{C}^\infty s : M \rightarrow E$  telle que  $\pi \circ s = \text{Id}_M$ . On note  $\Gamma(U, E)$  l'espace des sections  $\mathcal{C}^\infty$  de  $E|_U$ . Il a une structure naturelle d'espace vectoriel.

On peut voir une section comme une application, de  $M$  dans  $\mathbb{R}^r$ , mais dont le but bouge en même temps que l'origine. Localement, le fibré étant trivial, une section peut toujours s'identifier à une telle application. En composant  $\varphi_\alpha^{-1}$  avec la projection sur le facteur  $\mathbb{R}^r$  du produit cartésien  $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$  on définit une application  $\psi_\alpha : E|_{U_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^r$  telle que  $\tau_{\beta\alpha} \circ \psi_\alpha = \psi_\beta$ . On en déduit qu'une collection d'applications  $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^r$  définit une section de  $E$  sur  $M$  si et seulement si la condition de compatibilité suivante est vérifiée :

$$\tau_{\beta\alpha} \circ s_\alpha = s_\beta. \quad (8)$$

Exemples :

1. Un champ de vecteurs sur une variété  $M$  est par définition une section de  $TM$ . La dualité entre  $TM$  et  $T^*M$  permet d'identifier les applications de  $TM \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont linéaires sur les fibres avec les sections de  $T^*M$  (également appelées champs de 1-formes) et de même les applications de  $T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont linéaires avec les sections de  $TM$  (les champs de vecteurs).
2. De même que le graphe d'une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  définit une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n+p}$  on peut voir une section comme une sous-variété de  $E$ , à laquelle la projection  $\pi$  se restreint en un difféomorphisme sur  $M$ .
3. Comme une application linéaire conserve le vecteur nul, les équations  $s_\alpha = 0$  données sur tous les  $U_\alpha$  vérifient bien les conditions (8). Elles définissent par conséquent une section globale de  $E$  sur  $M$  : la *section nulle*. À l'aide de cette remarque, on peut fabriquer des tas de sections  $\mathcal{C}^\infty$  non nulles d'un fibré vectoriel : il suffit de prendre une section  $\mathcal{C}^\infty$  à support<sup>6</sup> compact dans un des ouverts  $U_\alpha$ , et de la prolonger par 0. On peut ensuite prendre des combinaisons linéaires arbitraires de telles sections. Par contraste, de nombreux fibrés vectoriels holomorphes n'ont aucune section holomorphe non nulle !

*Exercice.* — Montrer qu'un fibré en droites est trivial si et seulement s'il admet une section globale qui ne s'annule pas. Prouver soigneusement que toute section du fibré non trivial sur  $\mathbb{S}^1$  défini au § précédent s'annule en au moins un point.

*Remarque.* — Les fibres d'un fibré vectoriel (par exemple le cotangent ou le tangent à une variété) sont des espaces vectoriels de même dimension, mais il n'existe pas d'isomorphisme

6. On appelle *support* d'une section l'adhérence de l'ensemble des points de  $M$  où elle n'est pas nulle. Il faut prendre garde au fait que « zéro » est la seule « valeur » d'une section d'un fibré vectoriel arbitraire qui soit bien définie.

naturel entre elles (c'est par exemple la donnée d'une connexion qui permet de le faire le long de chemins de la base du fibré).

DÉFINITION 1.19. — Soient  $E \xrightarrow{\pi} M, E' \xrightarrow{\pi'} M$  deux fibrés vectoriels sur une même variété  $M$ . Un morphisme de fibrés vectoriels est une application  $\mathcal{C}^\infty \Phi : E \rightarrow E'$  qui préserve les fibres et qui est linéaire en restriction à celles-ci.

La première condition signifie qu'il existe une application  $\varphi$  de  $M$  dans elle-même faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M. \end{array}$$

La seconde signifie que la restriction de  $\Phi$  à la fibre  $E_x$  en un point définit une application linéaire  $\Phi_x : E_x \rightarrow E'_{\varphi(x)}$ .

Un sous-fibré  $F$  d'un fibré vectoriel  $E$  est un fibré dont les fibres sont des sous-espaces vectoriels de celles de  $E$  et qui est localement engendré par rang  $F$  sections de  $E$ .  $F$  est alors une sous-variété fermée de  $E$ , et l'inclusion est un morphisme de  $F$  dans  $E$ .

Le rang d'un morphisme en  $x$  est défini comme le rang de  $\Phi_x$ , il n'est pas nécessairement constant, mais il est toujours semi-continu inférieurement.

PROPOSITION 1.20. — Si  $\Phi : E \rightarrow F$  est un morphisme de fibrés vectoriels dont le rang est localement constant, alors son image et son noyau sont des sous-fibrés de, respectivement,  $F$  et  $E$ .

C'est la version « fibrés vectoriels » du théorème 1.13, mais le fait que les morphismes soient linéaires sur les fibres simplifie l'argument. En fait, le théorème du rang s'appliquant ponctuellement, l'une ou l'autre des deux conclusions implique l'hypothèse.

*Démonstration.* — On suppose donc  $\text{rang} \Phi_x = p \forall x \in M$ . Le problème est clairement local. Soit  $(s_1, \dots, s_r)$  un champ de repères sur  $U \subset M$ . Alors les combinaisons de  $\Phi(s_1), \dots, \Phi(s_r)$  engendrent l'image de  $\Phi$  en chaque point de  $U$ . La condition d'indépendance linéaire étant ouverte, quitte à restreindre  $U$ , tous les  $\Phi(E_x)$  pour  $x \in U$  sont engendrés par une sous-famille  $\Phi(s_1), \dots, \Phi(s_p)$ , qui peut être complétée (localement) en un champ de repères. Ceci prouve que l'image  $\cup_{x \in M} \Phi(E_x)$  est bien un sous-fibré de  $F$ . Maintenant, pour  $k > p, \Phi(s_k)$  est une combinaison linéaire des  $\Phi(s_j), j = 1, \dots, p$ . On en déduit un champ de repères de  $E$  sur  $U$  de la forme  $(s_1, \dots, s_p, s_{p+1} - \sum_{j=1}^p \sigma_{p+1,j} s_j, \dots, s_r - \sum_{j=1}^p \sigma_{r,j} s_j)$ . Il est clair que le noyau de  $\Phi$  est précisément le sous-fibré engendré par les  $r - p$  dernières sections.

### 1.3.3. Opérations algébriques sur les fibrés vectoriels.

À toute opération algébrique sur les espaces vectoriels correspond une opération analogue sur les fibrés. Nous donnons ici quelques exemples : une fois assimilés, il n'est pas difficile de construire tout fibré obtenu de la sorte.

**1.3.3.1. Somme directe.** — Soient deux fibrés  $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M, E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$  de rang (resp.)  $r_1, r_2$ , on définit la somme directe  $E_1 \oplus E_2$  de ces deux fibrés à l'aide des automorphismes de transition de  $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$  donnés matriciellement par

$$\begin{pmatrix} \tau_{\alpha\beta}^1 & 0 \\ 0 & \tau_{\alpha\beta}^2 \end{pmatrix}.$$

**1.3.3.2. Dual.** — Comme nous l'avons vu dans le cas de la dualité tangent/cotangent, les automorphismes de transition de  $E^*$  sont, en fonction de ceux de  $E : {}^t\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ .

**1.3.3.3. Produit tensoriel.** — De même, le fibré  $E_1 \otimes E_2$  est donné par les automorphismes de transition  $\tau_{\alpha\beta}^1 \otimes \tau_{\alpha\beta}^2$  sur  $\mathbb{R}^{r_1} \otimes \mathbb{R}^{r_2} \simeq \mathbb{R}^{r_1 r_2}$ . On peut ainsi interpréter un morphisme de fibrés comme une section du fibré des homomorphismes  $\text{Hom}(E_1, E_2) \simeq E_2 \otimes E_1^*$ .

*Exemple.* — On a vu que si  $X$  est une sous-variété de  $Y$ , alors  $TX$  est de façon naturelle une sous-variété de  $TY$ . De plus  $T_x X$  est le sous-espace vectoriel des dérivations de  $T_x Y$  qui proviennent de dérivations de restrictions à  $X$  des germes de fonctions en  $x$ .  $TX$  est donc un sous-fibré de  $TY|_X$ . Ceci induit une suite exacte de fibrés sur  $X$  :

$$0 \rightarrow TX \rightarrow TY|_X \rightarrow NX|_Y \rightarrow 0$$

où  $NX|_Y \simeq TY|_X/TX$  est le fibré normal à  $X$  dans  $Y$ . Il n'existe pas de façon naturelle de voir  $T^*X$  comme une sous-variété de  $T^*Y$ . En fait, la suite exacte duale de la précédente :

$$0 \rightarrow N^*X|_Y \rightarrow T^*Y|_X \rightarrow T^*X \rightarrow 0$$

montre que  $T^*X$  est un quotient de  $T^*Y|_X$ . En revanche, le conormal  $N^*X|_Y$  de  $X$  dans  $Y$  est naturellement un sous-fibré de  $T^*Y|_X$ . Cette inclusion peut se voir élémentairement : point par point, on prend l'orthogonal pour la dualité tangent-cotangent de  $T_x X$  vu comme sous-espace de  $T_x Y$  :

$$N^*X|_Y = \{(x, d_x f), x \in X, d_x f \in T_x^* Y : T_x X \subset \ker d_x f\}.$$

Si on prend une carte  $\varphi$  sur  $Y$  telle que  $X$  ait pour équations locales  $\varphi_1 = \dots = \varphi_k = 0$  ( $\dim X = n - k$ ), alors  $(x, d_x f) \in N^*X|_Y$  si et seulement si :

- $x \in X$ ,
- $d_x f(\partial/\partial\varphi_i) = 0$  pour  $i > k$ .

Donc :

$$d_x f = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} d\varphi_i$$

On en déduit que  $N^*X|_Y$  est une sous-variété de  $T^*Y$  de dimension  $n - k + k = n = \dim N$ .

*Remarque.* — S'il existe un isomorphisme canonique entre  $TY$  et  $T^*Y$  issue d'une forme bilinéaire non dégénérée,  $N^*X|_Y$  s'identifie à  $TX^\perp = \cup_{x \in X} \{x\} \times (T_x X)^\perp$  où  $\perp$  désigne l'orthogonal pour la forme bilinéaire en question.

## 2. Formes différentielles

Dans cette section on généralise le calcul différentiel de  $\mathbb{R}^n$  à une variété. On se ramène donc systématiquement à  $\mathbb{R}^n$  au moyen de cartes.

### 2.1. Définition des tenseurs

On va poursuivre le point de vue développé à la section 1.3.2 et considérer la variété

$$T_{(k,l)}M = T^*M \times_M \cdots \times_M T^*M \times_M TM \times_M \cdots \times_M TM$$

où l'on a fait  $k$  produits de  $T^*M$  et  $l$  produits de  $TM$ . Il s'agit ici de produits fibrés, c'est-à-dire d'une somme directe abstraite des fibres au dessus de chaque point base, non du produit cartésien des espaces totaux. On appelle tenseur de type  $(k,l)$  la donnée d'une application  $\mathcal{C}^\infty$  et multilinéaire de  $T_{(k,l)}M$  sur  $\mathbb{R}$  (i.e. linéaire par rapport à chaque  $T^*M$  et à chaque  $TM$ ). Par dualité, un tenseur de type  $(k,l)$  est une section de

$$T^{(k,l)}M = TM \otimes \cdots \otimes TM \otimes T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M.$$

Selon ce formalisme, les champs de vecteurs sont les tenseurs de type  $(1,0)$  et les champs de 1-forme les tenseurs de type  $(0,1)$ . Les tenseurs de type  $(k,0)$  sont dits contravariants, ceux de type  $(0,l)$  sont dits covariants.

À l'aide d'un tenseur de type  $(k,l)$  et d'un tenseur de type  $(k',l')$  on peut construire un tenseur de type  $(k+k',l+l')$  en en faisant le produit (tensoriel). Grâce à la linéarité, tout tenseur de type  $(k,l)$  est une somme de produits tensoriels de  $k$  champs de vecteurs par  $l$  1-formes, donc la dimension de  $T_m^{(k,l)}M$  est  $n^{k+l}$ , puisque si  $T$  est un tenseur de type  $(k,l)$ , il existe  $n^{k+l}$  réels tels que (en coordonnées locales):

$$T = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l \in [1, n]} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{\mu_k}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_l}. \quad (9)$$

Lorsqu'on change de systèmes de coordonnées, on obtient les nouvelles composantes en fonction des anciennes en appliquant les formules de changement de coordonnées pour les champs de vecteurs et de 1-formes (5) et (6) dans (9) :

$$T_{\nu'_1 \dots \nu'_l}^{\mu'_1 \dots \mu'_k} = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l \in [1, n]} \frac{\partial x_{\mu'_1}}{\partial x_{\mu_1}} \times \cdots \times \frac{\partial x_{\mu'_k}}{\partial x_{\mu_k}} \times \frac{\partial x_{\nu_1}}{\partial x_{\nu'_1}} \times \frac{\partial x_{\mu_l}}{\partial x_{\nu'_l}} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k}.$$

Les composantes d'un tenseur  $T$  de type  $(k,l)$  sont donc les

$$T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k}$$

avec  $1 \leq a_1 \leq n, \dots, 1 \leq b_l \leq n$ .

*Convention.* — Lorsqu'on a des égalités entre composantes de tenseurs, on utilise des lettres romaines comme indice si l'égalité est valable dans tout système de coordonnées (c'est alors une égalité entre tenseurs) et des lettres grecques si l'égalité n'est valable que dans un système de coordonnées.

Par exemple, considérons le tenseur  $dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1$ , on a :

$$(dx^1 \wedge dx^2)_{a_1 a_2} = (dx^1 \otimes dx^2)_{a_1 a_2} - (dx^2 \otimes dx^1)_{a_1 a_2}$$

car l'égalité composante par composante est vraie dans n'importe quel système de coordonnées, pas seulement dans le système  $(x_1, \dots, x_n)$ . Par contre, l'égalité

$$[(dx^1 \otimes dx^2)_{\alpha_1 \alpha_2}]^2 = (dx^1 \otimes dx^2)_{\alpha_1 \alpha_2}$$

n'est vraie que dans le système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  car ce n'est que dans ce système que toutes les composantes de ce tenseur sont 0 ou 1, donc on utilise les lettres grecques.

On adopte donc pour un champ de vecteur la notation  $v^c$  et pour un champ de 1-formes  $w_c$ .

DÉFINITION 2.1. — Soient  $v$  et  $w$  deux champs de vecteurs. On remarque que l'application :

$$f \in \mathcal{C}^\infty(m, \mathbb{R}) \rightarrow v(w(f)) - w(v(f))$$

vérifie les critères (2) et (3), il s'agit donc d'un champ de vecteurs appelé crochet de Lie des deux champs  $v$  et  $w$  et noté  $[v, w]$ .

En coordonnées, on a :

$$\begin{aligned} [v, w] f &= v(w(f)) - w(v(f)) \\ &= v(w^a \partial_a f) - w(v^a \partial_a f) \\ &= v^b \partial_b (w^a \partial_a f) - w^b \partial_b (v^a \partial_a f) \\ &= (v^b \partial_b w^a - w^b \partial_b v^a) \partial_a f, \end{aligned}$$

donc :

$$[v, w]^a = v^b \partial_b w^a - w^b \partial_b v^a. \quad (10)$$

*Remarque.* — Il ne faut pas confondre les indices de composantes de tenseur avec d'éventuels indices permettant de différencier plusieurs tenseurs. Par exemple, ci-dessus  $dx^1$  désigne une forme différentielle obtenue en prenant la différentielle de la première coordonnée, ce n'est pas la première composante d'un tenseur.

## 2.2. Opérations sur les tenseurs

### 2.2.1. Produit tensoriel.

Il a déjà été défini dans la section précédente, on obtient ainsi une application de  $T^{(k,l)} M \times T^{(k',l')} M$  dans  $T^{(k+k',l+l')} M$ .

### 2.2.2. Contraction.

On suppose que  $k \geq 1$  et  $l \geq 1$ . La contraction permet de définir un tenseur de type  $(k-1, l-1)$ :

$$T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} \rightarrow CT = T_{b_1 \dots c \dots b_l}^{a_1 \dots c \dots a_k}$$

On fixe tous les indices sauf l'indice covariant et l'indice contravariant par rapport auxquels on va effectuer la contraction. On obtient alors un endomorphisme  $\varphi$  de  $TM$ , il est défini en coordonnées locales par

$$v^c \rightarrow \varphi(v^c) = w^d = \sum_{c=1}^n T_{b_1 \dots c \dots b_l}^{a_1 \dots d \dots a_k} v^c$$

ou plus géométriquement, un tenseur d'ordre (1,1) est une application bilinéaire de  $T_m^*M \times T_mM$  donc si on fixe un vecteur  $v$  de  $T_mM$  on a une forme linéaire sur  $T_m^*M$  c'est-à-dire un vecteur  $w = \varphi(v)$  de  $T_mM = (T_m^*M)^*$ .

On calcule alors la trace de cette application linéaire. On a ainsi défini un tenseur d'ordre  $(k-1, l-1)$ . En coordonnées locales, on a :

$$(CT)_{v_1 \dots v_{l-1}}^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}} = \sum_{\lambda \in [1, n]} T_{v_1 \dots \lambda \dots v_{l-1}}^{\mu_1 \dots \lambda \dots \mu_{k-1}}$$

ce qui justifie la notation que l'on a choisie pour le tenseur  $CT$ .

Pour les tenseurs entièrement covariants ou entièrement contravariants, on peut définir les opérations de symétrisation et d'antisymétrisation.

### 2.2.3. Symétrisation.

Si on compose un tenseur covariant (ou contravariant) avec une permutation des  $l$  espaces vectoriels  $T_mM$  sur le produit desquels il agit, on obtient un nouveau tenseur. On peut donc construire un tenseur symétrique à partir d'un tenseur quelconque en faisant agir tout le groupe des permutations de  $l$  éléments :

$$T_{(a_1 \dots a_l)} = \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_l} T_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(l)}}$$

les parenthèses signifient par convention que l'on a symétrisé le tenseur. Le coefficient  $1/l!$  assure que le symétrisé d'un tenseur symétrique est égal à lui-même.

Par exemple, le tenseur métrique est un tenseur symétrique de type (0,2). Il est à la base de la géométrie riemannienne.

Le rang du fibré des tenseurs symétriques covariants d'ordre  $l$  est

$$C_{n+l-1}^l = \text{card}\{b : b_1 \leq \dots \leq b_l\}$$

(on rajoute  $i-1$  à chacun des  $b_i$  pour avoir des inégalités strictes d'où le résultat).

### 2.2.4. Antisymétrisation.

$$T_{[a_1 \dots a_l]} = \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_l} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} T_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(l)}}$$

où  $\varepsilon(\sigma)$  désigne la parité de la permutation  $\sigma$ . Le crochet signifie que l'on a antisymétrisé le tenseur. Si  $l > n$ , le seul tenseur antisymétrique d'ordre  $l$  est le tenseur nul.

Un tenseur antisymétrique covariant [respectivement contravariant] d'ordre  $l$  est appelé  $l$ -forme différentielle [respectivement  $l$ -vecteur]. Le rang du fibré  $\wedge^l T^*M$  des  $l$ -formes différentielles est

$$C_n^l = \text{card}\{b : b_1 < \dots < b_l\}.$$

### 2.3. Formes différentielles

Les opérations de produit tensoriel et de contraction se traduisent après antisymétrisation en produit extérieur ( $\wedge$ ) de formes et produit intérieur d'un vecteur par une forme.

#### 2.3.1. Produit extérieur.

On pose :

$$(T \wedge R)_{a_1 \dots a_{t+r}} = \frac{1}{t!r!} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+t}} T_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(t)}} R_{a_{\sigma(t+1)} \dots a_{\sigma(t+r)}}$$

Par exemple, dans le système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ ,  $(dx^1)_{\alpha_1} = 1$  si  $\alpha_1 = 1$  et 0 sinon,  $(dx^2)_{\alpha_2} = 1$  si  $\alpha_2 = 2$  et 0 sinon. Donc

$$(dx^1 \wedge dx^2)_{\alpha_1 \alpha_2} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (dx^1)_{\alpha_{\sigma(1)}} (dx^2)_{\alpha_{\sigma(2)}}$$

est non nul si  $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 2)$  ou  $(2, 1)$  et vaut respectivement 1 et -1. On a donc bien

$$dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1$$

car deux tenseurs qui ont même composantes dans un système de coordonnées sont forcément égaux.

PROPOSITION 2.2. — *Le produit extérieur a les propriétés suivantes :*

*Antisymétrie :*

$$R \wedge T = (-1)^{rt} T \wedge R.$$

*Associativité :*

$$(T \wedge R) \wedge S = T \wedge (R \wedge S).$$

*Démonstration :*

- Antisymétrie.

$$(R \wedge T)_{a_1 \dots a_{t+r}} = \frac{1}{t!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+t}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} T_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(t)}} R_{a_{\sigma(t+1)} \dots a_{\sigma(t+r)}}.$$

On effectue le changement d'indice de sommation :

$$\sigma = \sigma' \circ \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & r+1 & \dots & r+t \\ t+1 & \dots & t+r & 1 & \dots & t \end{pmatrix}$$

d'où :

$$(R \wedge T)_{a_1 \dots a_{t+r}} = \frac{1}{t!r!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{t+r}} (-1)^{\varepsilon(\sigma')} (-1)^{\varepsilon((t+1 \dots t+r \ 1 \dots t))} T_{a_{\sigma'(t+1)} \dots a_{\sigma'(t+r)}} R_{a_{\sigma'(1)} \dots a_{\sigma'(r)}}.$$

Comme

$$\varepsilon((t+1 \dots t+r \ 1 \dots t)) = \varepsilon((2 \dots r+t \ 1)^t) = [(-1)^{r+t+1}]^t = (-1)^{rt},$$

on a bien

$$(R \wedge T)_{a_1 \dots a_{t+r}} = (-1)^{rt} (T \wedge R)_{a_1 \dots a_{t+r}}.$$

- Associativité.

$$\begin{aligned} ((T \wedge R) \wedge S)_{a_1 \dots a_l} &= \frac{1}{(r+t)!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{t+r+s}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (T \wedge R)_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(t+r)}} S_{a_{\sigma(t+r+1)} \dots a_{\sigma(t+r+s)}} \\ &= \frac{1}{(r+t)!r!t!s!} \sum (-1)^{\varepsilon(\sigma)+\varepsilon(\sigma')} T_{a_{\sigma' \circ \sigma(1)} \dots a_{\sigma' \circ \sigma(t)}} \\ &\quad \times R_{a_{\sigma' \circ \sigma(t+1)} \dots a_{\sigma' \circ \sigma(t+r)}} S_{a_{\sigma(t+r+1)} \dots a_{\sigma(t+r+s)}} \end{aligned}$$

où la somme porte sur  $\sigma \in \mathfrak{S}_{t+r+s}, \sigma' \in \sigma(\{\sigma(1), \dots, \sigma(t+r)\})$ . Comme  $S$  est antisymétrique :

$$S_{a_1 \dots a_l} = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma'' \in \mathfrak{S}(\{\sigma(t+r+1), \dots, \sigma(t+r+s)\})} (-1)^{\varepsilon(\sigma'')} S_{a_{\sigma'' \circ \sigma(t+r+1)} \dots a_{\sigma'' \circ \sigma(t+r+s)}}.$$

Avec  $\sigma'$  et  $\sigma''$ , on construit une permutation  $\tilde{\sigma}$  de  $\{1, \dots, t+r+1\}$  qui fixe  $\{\sigma(1), \dots, \sigma(t+r)\}$  et  $\{\sigma(t+r+1), \dots, \sigma(t+r+s)\}$ . Donc :

$$\begin{aligned} ((T \wedge R) \wedge S)_{a_1 \dots a_l} &= \frac{1}{(r+t)!s!r!t!s!} \sum (-1)^{\varepsilon(\sigma)+\varepsilon(\tilde{\sigma})} T_{a_{\tilde{\sigma} \circ \sigma(1)} \dots a_{\tilde{\sigma} \circ \sigma(t)}} \\ &\quad \times R_{a_{\tilde{\sigma} \circ \sigma(t+1)} \dots a_{\tilde{\sigma} \circ \sigma(t+r)}} S_{a_{\tilde{\sigma} \circ \sigma(t+r+1)} \dots a_{\tilde{\sigma} \circ \sigma(t+r+s)}} \end{aligned}$$

où la somme porte sur  $\sigma, \tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_{t+r+s}, \tilde{\sigma}$  fixant  $\{\sigma(1), \dots, \sigma(t+r)\}$  et  $\{\sigma(t+r+1), \dots, \sigma(t+r+s)\}$ . On change d'indice de sommation en remplaçant  $\sigma$  par  $\tau = \tilde{\sigma} \circ \sigma$ , et on s'aperçoit que la somme obtenue ne dépend pas de  $\tilde{\sigma}$  : lorsqu'on somme sur  $\tilde{\sigma}$ , il apparaît le nombre de permutations qui fixent  $\{\sigma(1), \dots, \sigma(t+r)\}$  et  $\{\sigma(t+r+1), \dots, \sigma(t+r+s)\}$ , c'est-à-dire  $s!(r+t)!$ . Il vient finalement :

$$((T \wedge R) \wedge S)_{a_1 \dots a_l} = \frac{1}{r!t!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{T}_{t+r+s}} (-1)^{\varepsilon(\tau)} T_{a_{\tau(1)} \dots a_{\tau(t)}} R_{a_{\tau(t+1)} \dots a_{\tau(t+r)}} S_{a_{\tau(t+r+1)} \dots a_{\tau(t+r+s)}}. \quad (11)$$

La formule ci-dessus ne dépend que de  $T, R, S$ , elle serait donc identique pour  $(T \wedge (R \wedge S))$ , on conclut ainsi à l'associativité.

On généralise sans difficultés la formule (11) a un produit extérieur de  $n$  formes différentielles de degré quelconque. Par exemple, si  $(x_1, \dots, x_n)$  est un système de coordonnées locales, on a :

$$(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0, 1 \text{ ou } -1$$

le résultat est nul si deux au moins des indices  $i_k$  sont égaux ou si les ensembles  $\{i_1, \dots, i_k\}$  et  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  sont distincts et vaut  $(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$  dans le cas contraire, ( $\sigma$  désignant la permutation telle que  $\sigma(i_k) = \alpha_k$ ).

**2.3.1.1. Base des  $l$ -formes différentielles.** — En coordonnées locales, on peut prendre les

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n$$

(ici les  $i_k$  sont des indices permettant de différencier des formes différentielles, ce ne sont pas des composantes d'un tenseur).

*Notation.* — Étant donné un multi-indice  $I = (i_1, \dots, i_l) \in [1, n]^k$  on notera  $|I| = l$  la longueur du multi-indice, et  $dx^I = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}$ .

*Remarque.* — Les fonctions de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  peuvent être vues comme des 0-formes, les formules précédentes sont alors valables si on définit le produit extérieur d'une  $p$ -forme par une 0-forme comme le produit usuel.

### 2.3.2. Produit intérieur par un champ de vecteurs.

DÉFINITION 2.3. — Soit  $T$  un tenseur antisymétrique et  $v$  un champ de vecteurs. On contracte le tenseur sur sa première composante avec le champ de vecteurs :

$$(i(v)T)_{a_2 \dots a_t} = T_{a_1 \dots a_t} v^{a_1},$$

on obtient ainsi un tenseur de type  $(0, t-1)$  qui est clairement antisymétrique.

*Exemple.* — Si  $v$  a pour coordonnées  $(v_1, v_2)$  dans la base duale de la base  $(dx^1, dx^2, \dots)$  alors :

$$i(v)(dx^1 \wedge dx^2) = v^1 dx^2 - v^2 dx^1.$$

DÉFINITION 2.4. — On appelle dérivation d'ordre  $d \in \mathbb{Z}$  une application linéaire  $D_d$  définie de  $T^{(0,l)}$  vers  $T^{(0,l+d)}$  pour tout  $l$  telle que pour toutes formes différentielles  $T$  et  $R$  :

$$D_d(T \wedge R) = (D_d T) \wedge R + (-1)^{dt} T \wedge D_d R. \quad (12)$$

Les dérivations que nous avons vues au § 1.2.1 sont donc des dérivations d'ordre 0.

PROPOSITION 2.5. — Le produit intérieur par un vecteur est une dérivation d'ordre -1, i.e. :

$$i(v)(T \wedge R) = (i(v)T) \wedge R + (-1)^t T \wedge (i(v)R).$$

*Démonstration.* —

$$\begin{aligned} (i(v)(T \wedge R))_{a_2 \dots a_{t+r}} &= (T \wedge R)_{a_1 \dots a_{t+r}} v^{a_1} \\ &= \frac{1}{t!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{t+r}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} T_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(t)}} R_{a_{\sigma(t+1)} \dots a_{\sigma(t+r)}} v^{a_1}. \end{aligned} \quad (13)$$

On décompose alors la somme en regardant si  $k = \sigma^{-1}(1) \in \{1, \dots, t\}$  ou à  $\{t+1, \dots, t+r\}$ . Dans le premier cas, l'indice  $a_1$  est dans le tenseur  $T$  et dans le deuxième cas dans le tenseur  $R$ .

- Premier cas.

Si  $k \neq 1$ , on associe à  $\sigma$  la permutation  $\sigma' \in \mathfrak{S}(\{2, \dots, t+r\})$  en posant

$$\sigma'(k) = \sigma(1), \quad \sigma'(j) = \sigma(j), \quad j \neq k, \quad j \geq 2,$$

(si  $k = 1$ , on pose  $\sigma' = \sigma$ ), on peut réécrire  $\sigma$  sous la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & t+r \\ \sigma'(k) & \sigma'(2) & \dots & \sigma'(i) & \dots & 1 & \dots & \sigma'(t+r) \end{pmatrix}.$$

Si  $k \neq 1$ , on a  $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma') + 1$ , donc

$$(-1)^{\varepsilon(\sigma)} T_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(t)}} = (-1)^{\varepsilon(\sigma')+1} T_{a_{\sigma'(k)} a_{\sigma'(2)} \dots a_{\sigma'(k-1)} a_1 a_{\sigma'(k+1)} \dots a_{\sigma'(t)}} = (-1)^{\varepsilon(\sigma')} T_{a_1 a_{\sigma'(2)} \dots a_{\sigma'(t)}}$$

car  $T$  est antisymétrique. Si  $k = 1$ , l'égalité entre les deux extrêmes est évidente. Donc la première partie de la somme (13) s'écrit :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{t!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{2, \dots, t+r\}), 1 \leq k \leq t} (-1)^{\varepsilon(\sigma')} (i(v)T)_{a_{\sigma'(2)} \dots a_{\sigma'(t)}} R_{a_{\sigma'(t+1)} \dots a_{\sigma'(t+r)}} \\ &= \frac{t}{t!r!} (t-1)!r! [(i(v)T) \wedge R]_{a_2 \dots a_{t+r}} \\ &= [(i(v)T) \wedge R]_{a_2 \dots a_{t+r}}. \end{aligned}$$

- Deuxième cas.

On associe  $\sigma'$  à  $\sigma$  comme dans le premier cas, et on obtient comme terme général de la somme :

$$(-1)^{\varepsilon(\sigma')+1} T_{a_{\sigma'(k)} a_{\sigma'(2)} \dots a_{\sigma'(t)}} R_{a_{\sigma'(t+1)} \dots a_{\sigma'(k-1)} a_1 a_{\sigma'(k+1)} \dots a_{\sigma'(t+r)}} v^{a_1}.$$

On fait alors le changement d'indice de sommation :

$$\tilde{\sigma} = \sigma' \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & t+1 & k \\ k & 2 & \dots & t & t+1 \end{pmatrix}.$$

Le terme général s'écrit alors :

$$(-1)^{\varepsilon(\tilde{\sigma})+1+t} T_{a_{\tilde{\sigma}(2)} \dots a_{\tilde{\sigma}(t+1)}} R_{a_{\tilde{\sigma}(k)} a_{\tilde{\sigma}(t+2)} \dots a_{\tilde{\sigma}(k-1)} a_1 a_{\tilde{\sigma}(k+1)} \dots a_{\tilde{\sigma}(t+r)}} v^{a_1}.$$

On utilise enfin l'antisymétrie du tenseur  $R$ , la deuxième partie de la somme s'écrit :

$$\frac{1}{t!r!} r \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}(\{2, \dots, t+r\})} (-1)^{\varepsilon(\tilde{\sigma})+t} T_{a_{\tilde{\sigma}(2)} \dots a_{\tilde{\sigma}(t+1)}} R_{a_1 a_{\tilde{\sigma}(t+2)} \dots a_{\tilde{\sigma}(t+r)}} v^{a_1}$$

qui est bien égal à  $(-1)^t T \wedge (i(v)R)$ .

*Remarque.* — On définit le produit intérieur d'un vecteur par une fonction comme étant nul, les formules de ce § sont alors valables pour les formes différentielles de degré quelconque.

## 2.4. Opérateur $d$

Si on se donne  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $df : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , on peut aussi voir  $df$  comme une section de  $T^*M$ . On passe ainsi d'une forme différentielle de degré 0 à une forme différentielle de degré 1. On va généraliser l'opérateur  $d$  à toutes les formes différentielles. On l'appelle l'opérateur de différentiation extérieure. On notera dans la suite  $\mathcal{E}_p^\infty(M)$  l'espace des  $p$ -formes différentielles  $\mathcal{E}^\infty$  sur  $M$ .

**THÉORÈME 2.6.** — *Il existe une unique dérivation  $d : \bigwedge^l T^*M \rightarrow \bigwedge^{l+1} T^*M$  d'ordre 1 telle que  $df$  soit la différentielle de  $f$  et telle que  $d^2 = 0$ . On a :*

$$(dT)_{a_1 \dots a_{t+1}} = \sum_{k=1}^{t+1} (-1)^{k-1} \partial_{a_k} T_{a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_{t+1}} \quad (14)$$

$$d(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (15)$$

*Démonstration.* — Commençons par l'unicité. Si  $d$  et  $d'$  satisfont aux exigences du théorème, alors  $d = d'$  sur les fonctions, de plus

$$d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = 0 = d'(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$$

car  $d^2 = d'^2 = 0$ . Puis :

$$\begin{aligned} d(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= d f \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= d' f \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = d'(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}), \end{aligned}$$

donc  $d' = d$  car tout tenseur antisymétrique est localement combinaison linéaire finie de tenseur du type  $f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ . Il suffit donc de prouver l'existence locale de  $d$ , donc de vérifier que la formule (14) définit une dérivation d'ordre 1 telle que  $d^2 = 0$ .

$$\begin{aligned} (d^2 T)_{a_1 \dots a_{t+2}} &= \sum_{k=1}^{t+2} (-1)^{k-1} \partial_{a_k} (dT)_{a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_{t+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{t+2} \sum_{1 \leq j \leq t+2, j \neq k} \partial_{a_k} ((-1)^{f(j,k)} \partial_{a_j} T_{a_1 \dots a_{j-1} a_{j+1} \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_{t+2}}) \end{aligned}$$

où  $f(j,k) = j-1$  si  $j < k$  et  $f(j,k) = j-2$  si  $j > k$ . Ce qui donne  $d^2 T = 0$  car les termes  $(j,k)$  et  $(k,j)$  de la somme s'annulent.

Dernier point à vérifier :  $d$  est une dérivation d'ordre 1, i.e.

$$d(T \wedge R) = (dT) \wedge R + (-1)^t T \wedge (dR).$$

Pour simplifier les notations, on adopte la convention que si on recouvre par le signe  $\hat{\phantom{a}}$  un indice d'un ensemble d'indice, c'est qu'il faut le retirer de l'ensemble d'indice, par exemple :

$$a_1 \dots \hat{a}_k \dots a_t \text{ signifie } a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_t.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} d(T \wedge R)_{a_1 \dots a_{t+r+1}} &= \sum_{k=1}^{t+r+1} (-1)^{k-1} \partial_{a_k} (T \wedge R)_{a_1 \dots \hat{a}_k \dots a_{t+r+1}} \\ &= \frac{1}{t!r!} \sum (-1)^{k-1+\varepsilon(\sigma')} \partial_{a_k} (T_{a_{\sigma'(1)} \dots \hat{a}_k \dots a_{\sigma'(t+1)}} R_{a_{\sigma'(t+2)} \dots a_{\sigma'(t+r+1)}}) \end{aligned}$$

où la somme porte sur  $1 \leq k \leq t+r+1$  et  $\sigma' \in \sigma(\{1, \dots, \hat{k}, \dots, t+r+1\})$ . Remarquons que si  $k \geq t+2$ , il faut décaler les indices du terme général de la somme en :

$$\partial_{a_k} (T_{a_{\sigma'(1)} \dots a_{\sigma'(t)}} R_{a_{\sigma'(t+1)} \dots \hat{a}_k \dots a_{\sigma'(t+r+1)}}).$$

On peut décomposer ce terme général en deux, en faisant porter la dérivation sur  $T$  ou sur  $R$ . Il s'agit d'identifier avec  $dT \wedge R$  dans le premier cas et avec  $(-1)^t T \wedge dR$  dans le second. Or,

$$(dT \wedge R)_{a_1 \dots a_{t+r+1}} = \frac{1}{(t+1)!r!} \sum (-1)^{\varepsilon(\sigma)+\alpha-1} \partial_{a_{\sigma(\alpha)}} T_{a_{\sigma(1)} \dots \hat{a}_{\sigma(\alpha)} \dots a_{\sigma(t+1)}} R_{a_{\sigma(t+2)} \dots a_{\sigma(t+r+1)}}$$

où la somme porte sur  $\sigma \in \mathfrak{S}_{t+r+1}$  et sur  $\alpha \in [1, t+1]$ . À un tel couple  $(\sigma, \alpha)$ , nous allons faire correspondre un triplet  $(\sigma', k, \alpha)$  où  $\sigma'$  est une permutation fixant  $k$ , qu'on identifie naturellement avec une permutation de  $\sigma(\{1, \dots, \hat{k}, \dots, t+r+1\})$ : on pose  $k = \sigma(\alpha)$  et  $\sigma' \circ (\alpha \dots k) = \sigma$  de telle sorte que  $\sigma$  soit égale à :

$$\begin{pmatrix} \dots & \alpha & \dots & k & \dots \\ \dots & k & \dots & \sigma(k) & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & k & \alpha & \dots & k-1 & k+1 & \dots \\ \dots & k & \sigma(\alpha+1) & \dots & \sigma(k) & \sigma(k+1) & \dots \end{pmatrix} \circ (\alpha \dots k).$$

Comme  $(\alpha \dots k)$  est un cycle de longueur  $k - \alpha + 1$ , on a

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma') + k - \alpha \Rightarrow \varepsilon(\sigma) + \alpha - 1 = \varepsilon(\sigma') + k - 1.$$

Le terme général de la somme de  $dT \wedge R$  devient si  $k > t+1$

$$(-1)^{\varepsilon(\sigma')+k-1} \partial_{a_k} T_{a_{\sigma'(1)} \dots a_{\sigma'(\alpha-1)} \hat{a}_k a_{\sigma'(\alpha)} \dots a_{\sigma'(t)}} R_{a_{\sigma'(t+1)} \dots a_{\sigma'(k-1)} a_{\sigma'(k+1)} \dots a_{\sigma'(t+r+1)}}.$$

Si  $k \leq t+1$ , le terme général s'écrit :

$$(-1)^{\varepsilon(\sigma')+k-1} \partial_{a_k} T_{a_{\sigma'(1)} \dots a_{\sigma'(\alpha-1)} \hat{a}_k a_{\sigma'(\alpha)} \dots a_{\sigma'(k-1)} a_{\sigma'(k+1)} \dots a_{\sigma'(t+1)}} R_{a_{\sigma'(t+2)} \dots a_{\sigma'(t+r+1)}}.$$

On déplace ensuite le trou  $\hat{a}_k$  à sa place entre  $a_{\sigma'(k-1)}$  et  $a_{\sigma'(k+1)}$ , on constate que ce terme général ne dépend plus de  $\alpha$ , on somme donc par rapport à  $\alpha \in [1, t+1]$  qui donne un facteur  $t+1$  que l'on simplifie avec  $1/(t+1)!$  en  $1/t!$  et on obtient le terme général de la somme de  $d(T \wedge R)$  lorsqu'on fait porter la dérivation sur  $T$ .

De même,

$$(T \wedge dR)_{a_1 \dots a_{t+r+1}} = \frac{1}{t!(r+1)!} \sum (-1)^{\alpha-t-1} T_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(t)}} \partial_{a_{\sigma(\alpha)}} R_{a_{\sigma(t+1)} \dots \hat{a}_{\sigma(\alpha)} a_{\sigma(t+r+1)}}$$

où la somme porte sur  $\sigma \in \mathfrak{S}_{r+t+1}$  et sur  $\alpha \in [t+1, t+r+1]$ . On effectue la même correspondance que ci-dessus, on obtient donc le terme général de  $d(T \wedge R)$  lorsqu'on fait porter la dérivation sur  $R$  multiplié par  $(-1)^t$ .

*Exercices :*

1. Par l'argument d'unicité, on sait que si on change de base la formule (14) détermine l'action de  $d$  dans la nouvelle base. (Ceci justifie *a posteriori* l'utilisation de lettres romaines dans la démonstration de l'existence locale de  $d$  alors qu'on aurait dû utiliser des lettres grecques). Vérifiez-le directement.
2. Montrer que  $i(v)d + di(v)$  est une dérivation d'ordre 0. Plus généralement si  $D$  et  $D'$  sont deux dérivations d'ordre respectifs  $r$  et  $r'$ , montrer que :

$$[D, D'] = DD' - (-1)^{rr'} D'D$$

est une dérivation d'ordre  $r + r'$ .

Montrer que si deux dérivations d'ordre supérieur ou égal à  $-1$  coïncident sur les fonctions et sur les 1-formes, alors elles coïncident sur toutes les formes différentielles. Montrer que si deux dérivations d'ordre positif coïncident sur les fonctions et commutent avec  $d$  alors elles sont égales.

3. On définit le produit extérieur de vecteurs comme celui des 1-formes. Montrer que

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = k! \det(\omega_i(v_j)).$$

*Solution du 3<sup>e</sup> exercice.* — On a :

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)_{a_1 \dots a_k} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (\omega_1)_{a_{\sigma(1)}} \cdots (\omega_k)_{a_{\sigma(k)}}$$

et l'analogie pour le  $k$ -vecteur :

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)^{a_1 \dots a_k} = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} (-1)^{\varepsilon(\tau)} (v_1)^{a_{\tau(1)}} \cdots (v_k)^{a_{\tau(k)}},$$

donc :

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) &= (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)_{a_1 \dots a_k} (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)^{a_1 \dots a_k} \\ &= \sum_{\sigma, \tau} (-1)^{\varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\tau)} (\omega_1)_{a_{\sigma(1)}} \cdots (\omega_k)_{a_{\sigma(k)}} (v_1)^{a_{\tau(1)}} \cdots (v_k)^{a_{\tau(k)}} \\ &= \sum_{\sigma, \tau} (-1)^{\varepsilon(\tau^{-1} \circ \sigma)} \omega_1(v_{\tau^{-1} \circ \sigma(1)}) \cdots \omega_k(v_{\tau^{-1} \circ \sigma(k)}) \\ &= k! \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (-1)^{\varepsilon(\sigma')} \omega_1(v_{\sigma'(1)}) \cdots \omega_k(v_{\sigma'(k)}) \\ &= k! \det((\omega_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq k}). \end{aligned}$$

### 2.5. Pull-back & push-forward

Soit  $\varphi$  une application  $\mathcal{C}^\infty$  de  $M \rightarrow N$ . On rappelle qu'on a par dualité les deux applications :

$$T_x \varphi : \begin{cases} T_x M & \rightarrow T_{\varphi(x)} N \\ v & \mapsto T_x \varphi(v) \end{cases}, \quad T_x \varphi(v)(f) = v(f \circ \varphi)$$

et :

$$(T_x \varphi)^* : \begin{cases} T_{\varphi(x)}^* N & \rightarrow T_x^* M \\ \omega = d_{\varphi(x)} f & \mapsto T_{\varphi(x)}^* \varphi \cdot \omega = d_x(f \circ \varphi). \end{cases}$$

Nous allons montrer comment  $(T\varphi)^*$  s'étend aux formes différentielles en une application  $\varphi^*$ . On définit l'action de  $\varphi^*$  sur les 1-formes par :

$$\varphi^*(\omega)(x) = (T_{\varphi(x)} \varphi)^* \omega(\varphi(x)).$$

Observons pour commencer que, si  $f$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $N$ , et  $\omega$  une 1-forme sur  $N$  on a alors :

$$\varphi^*(f\omega)(x) = (T_x \varphi)^* [(f\omega)(\varphi(x))] = f \circ \varphi(x) (T_x \varphi)^* [(\omega)(\varphi(x))]$$

par linéarité de l'application linéaire tangente. On pose donc :

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi$$

et l'on constate qu'on peut définir  $\varphi^* \omega$  pour toute  $p$ -forme ( $p = 0, \dots, n$ ) par les relations :

$$\varphi^*(T \otimes R) = \varphi^* T \otimes \varphi^* R, \quad \varphi^*(T + R) = \varphi^* T + \varphi^* R.$$

En coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  sur  $N$ , si  $\omega = \sum \omega_I dx^I$  on aura  $\varphi^* \omega = \sum_I \omega \circ \varphi d\varphi^I$  où  $\varphi_i$  est la  $i$ -ème application coordonnée de  $\varphi$ .

PROPOSITION 2.7. — *Pour toute application  $\mathcal{C}^\infty \varphi : M \rightarrow N$ , le pull-back par  $\varphi$  (ou image inverse, ou transposée)*

$$\varphi^* : \bigwedge^p T^*N \rightarrow \bigwedge^p T^*M$$

*est un homomorphisme d'algèbre.*

*On a en outre la relation*

$$\forall \omega \in \bigwedge^p T^*N, \quad d\varphi^* \omega = \varphi^* d\omega.$$

*Démonstration.* — Par construction,  $\varphi^*$  est un homomorphisme entre les algèbres tensorielles sur  $N$  et  $M$ . Elle passe donc naturellement au quotient. Si  $\omega$  est une fonction, la seconde propriété est la définition de  $\varphi^*$ . Si  $\omega$  est la différentielle d'une fonction  $f$ , toujours par cette même définition, on a  $\varphi^* \omega = d(f \circ \varphi)$ , ce qui prouve que  $d\varphi^* \omega = 0$ . Comme le calcul de toute différentiation extérieure se ramène au cas des fonctions et des différentielles de fonctions par des opérations de l'algèbre extérieure, la première propriété permet de conclure.

Lorsque  $\varphi$  est un *difféomorphisme local* (i.e.  $T_x \varphi$  est bijective pour tout  $x$ ) on peut définir le *push-forward* (ou image directe) de la façon suivante : il existe un recouvrement  $(U_\alpha, \alpha \in A)$  de  $M$  par des ouverts suffisamment petits pour que  $\varphi$  soit un difféomorphisme entre chacun de ces ouverts et son image. On définit alors  $\varphi_* : \bigwedge^p T^*M \rightarrow \bigwedge^p T^*N$  par  $\varphi_* \omega = (\varphi|_{U_\alpha}^{-1})^* \omega$  sur chaque ouvert  $U_\alpha$ . Le fait que cette définition se recolle bien est évident puisque  $\varphi$  est un difféomorphisme en restriction à chaque  $U_\alpha$ , *a fortiori* sur les intersections, et que la définition ci-dessus marche *globalement* pour un difféomorphisme.

## 2.6. Intégration sur les variétés

### 2.6.1. Orientation.

PROPOSITION 2.8. — *Soit  $X$  une variété différentielle de dimension  $n$  ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *Il existe sur  $X$  une  $n$ -forme différentielle globale qui ne s'annule nulle part.*
- *Il existe un atlas sur  $X$  tel que le jacobien de tout changement de carte  $J(\varphi_{\alpha\beta})$  soit  $> 0$  sur  $U_{\alpha\beta}$ .*

L'équivalence de ces deux propriétés est relativement évidente dès que l'on s'est convaincu que le fibré  $\bigwedge^n T^*X$  est trivial sur les ouverts  $U_\alpha$  et que les automorphismes de transition sont précisément donnés par  $J(\varphi_{\alpha\beta})$ . Comme ce fibré est de rang 1, la première condition signifie qu'il est trivial, tandis que la seconde permet de fabriquer une section qui ne s'annule nulle part en recollant à partir de la fonction constante 1 dans  $U_\alpha$ .

Lorsque  $X$  vérifie l'une des deux conditions équivalentes de la proposition 2.8, elle est dite *orientable*.

*Exemples :*

1. Toute variété dont le fibré tangent est trivial est orientable : en particulier  $\mathbb{R}^n, \mathbb{T}^n$ . L'orientation canonique sur ces variétés est donnée par la forme volume  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ .

2. Bien que le fibré tangent à  $\mathbb{S}^n, \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  ne soit en général pas trivial, ces variétés sont orientables.
3. Montrer cependant que l'atlas de  $\mathbb{S}^2$  défini par les projections stéréographiques ne préserve pas l'orientation.
4. La bande de Möbius (Ex. 3, § 1.17), les espaces projectifs réels de dimension paire  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{2p}$  sont des exemples de variétés non orientables.
5. Nous verrons plus loin que toutes les variétés holomorphes sont orientables. Vérifier qu'en *conjuguant* l'une des deux projections stéréographiques, on obtient un atlas holomorphe de  $\mathbb{S}^2$  qui l'identifie à  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

*Exercice.* — Démontrer les affirmations ci-dessus.

Une variété *orientée* est un couple  $(X, dV)$  où  $X$  est une variété de dimension pure et  $dV$  une forme volume<sup>7</sup>.

### 2.6.2. Intégration.

Soit  $V \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert, muni de l'orientation canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On définit l'intégrale d'une  $n$ -forme sur  $V$  par la formule

$$\int_V f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_V f d\lambda$$

où  $d\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $V$ . Comme le produit extérieur est antisymétrique, une orientation de  $\mathbb{R}^n$  équivaut à une convention de signe dans les intégrales (intervertir  $x_1$  et  $x_2$  dans la formule ci-dessus revient à changer  $f$  en  $-f$ ). Avec cette convention, la formule usuelle de changement de variable dans une intégrale de  $\mathbb{R}^n$  se lit :

$$\text{Si } \varphi : V_1 \rightarrow V_2 \text{ est un difféomorphisme, } \int_{\varphi(V_1)} \omega = \int_{V_1} \varphi^* \omega. \quad (16)$$

En effet, si  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  et  $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  on a par définition

$$\varphi^* \omega = f \circ \varphi d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^n = f \circ \varphi J(\varphi) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Soit maintenant  $X$  une variété  $\mathcal{C}^\infty$  orientée. Sur un ouvert  $U$  de carte pour  $X$ , on a une application  $x$  de coordonnées locales vers un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $x$  préserve l'orientation de  $X$  si la forme volume  $x_* dV = \varphi dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  avec  $\varphi > 0$ . On définit alors  $\varepsilon(x)$  le coefficient d'orientation de  $x$  qui vaut 1 si  $x$  préserve l'orientation de  $X$ ,  $-1$  sinon. Si  $\omega$  est une  $n$ -forme différentielle, on définit son intégrale sur  $U$  par la formule

$$\int_U \omega = \varepsilon(x) \int_V x_* \omega.$$

Cette définition est indépendante de la carte choisie grâce à la formule (16) et une vérification immédiate. En se restreignant à des atlas vérifiant l'hypothèse de la proposition 2.8, on

<sup>7</sup> En fait, deux formes volumes sont nécessairement identiques à un facteur  $\mathcal{C}^\infty$  qui ne s'annule pas près. On forme alors deux classes d'équivalences de formes volumes sur les composantes connexes de  $X$  : une forme est équivalente à une autre si le facteur est positif. Une *orientation* est le choix de l'une de ces deux classes. Il faut entendre  $dV$  comme un représentant de l'une des classes.

peut oublier le coefficient  $\varepsilon(x)$ . Dans le cas où la variété  $X$  admet une partition de l'unité subordonnée à un atlas<sup>8</sup> — en particulier lorsque  $X$  est compacte — on définit l'intégrale d'une  $n$ -forme différentielle sur  $X$  par

$$\int_X \omega = \sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} \chi_{\alpha} \omega.$$

**DÉFINITION 2.9.** — Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur une variété orientée  $(X, dV)$ . L'intégrale de  $f$  sur  $X$  relativement à la forme volume  $dV$  est

$$\int_X f dV.$$

**2.6.2.1. Restriction.** — Si  $i : X \rightarrow Y$  est un plongement de  $X$  dans  $Y$ , et  $\omega$  est une  $(\dim X)$ -forme sur  $Y$ , l'application  $i$  est un difféomorphisme de  $X$  sur son image. On appelle *restriction* de  $\omega$  à  $X$  la forme différentielle  $\omega|_X = i^* \omega$  sur  $X$  et on notera souvent  $\int_X \omega = \int_X i^* \omega$ . Par convention, l'intégrale d'une  $p$ -forme sur une variété de dimension différente de  $p$  est nulle.

**2.6.2.2. Variétés à bord.** — Le tangent d'une variété à bord étant défini (et de rang constant)  $y$  compris aux points du bord, on peut voir le fibré tangent à  $\partial M$  comme un sous fibré (de codimension 1) de la restriction à  $\partial M$  de  $TM$ . La restriction d'une  $p$ -forme sur  $M$  à  $\partial M$  est donc définie comme à l'alinéa précédent. On a même une description très précise du fibré conormal dans le cas où  $M$  est un « ensemble de sous-niveau ». Si  $M = \{f \leq 0\}$ ,  $df$  définit une section non nulle de  $TM$  au voisinage du bord, dont le noyau en  $x \in \partial M$  est précisément  $T_x \partial M$ . Donc  $d_x f$  est un générateur de l'orthogonal de  $T_x \partial M$  dans  $T_x^* M$  : c'est un repère local du conormal. Si  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  sont des coordonnées locales sur  $\partial M$ ,  $df \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$  est une forme volume sur un ouvert de  $M$ . On voit donc qu'une orientation sur  $M$  donne une orientation sur  $\partial M$  dans ce cas — en fait ceci se voit algébriquement par le fait que le conormal étant trivial, la suite exacte sur  $\partial M$

$$0 \rightarrow T^* \partial M \rightarrow T^* M|_{\partial M} \rightarrow N^* \partial M|_M \rightarrow 0$$

induit par passage au déterminant une identification  $\wedge^{n-1} T^* \partial M \simeq \wedge^n T^* M$ . (En général on pourra toujours choisir des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  sur  $M$  dans lesquelles  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  soit la forme volume associée,  $M$  se représentera alors par  $x_1 \leq 0$ . Donc  $dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$  définit une forme volume sur  $\partial M$ , les choses se recollent car la notion d'intérieur oriente le conormal, donc  $\partial M$  est orientable.) Notez que cette convention donne l'orientation habituelle sur le demi espace  $\mathbb{H}^n$  mais son *opposé* sur  $\{x_1 > 0\}$ .

*Exercices :*

1. Le volume d'une variété est l'intégrale de la fonction 1. Montrer que le volume d'une courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^n$  est sa longueur (définie par l'abscisse curviligne).
2. Le disque épointé  $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$  est une sous-variété à bord de  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $dz/z^2 = (x^2 - y^2)^{-1}(dx + idy)$  définit une 1-forme différentielle sur  $\Delta^*$ . Calculer sa différentielle et les deux intégrales  $\int_{\partial \Delta^*} dz/z^2$ ,  $\int_{\Delta^*} d(dz/z^2)$ .

8. i.e. il existe une famille de fonctions  $\mathcal{C}^{\infty}$   $\chi_{\alpha}$  à support compact dans  $U_{\alpha}$  telle que  $\sum_{\alpha} \chi_{\alpha} = 1$  sur  $X$ . Nous supposons depuis la page 5 que c'est toujours le cas.

### 2.6.3. Formule de Stokes.

Nous sommes maintenant en position d'énoncer le théorème de Stokes qui, avec le lemme de Poincaré est un des deux outils fondamentaux de l'analyse (réelle).

**THÉORÈME 2.10 (de Stokes).** — Soient  $M$  une variété orientée à bord  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$ , et  $\omega$  une  $(n-1)$ -forme sur  $M$  à support compact. La formule suivante est vraie :

$$\int_{\partial M} \omega|_{\partial M} = \int_M d\omega.$$

*Remarque.* — Le support d'une section est défini dans la note 6, page 19. La formule ci-dessus est donc vraie pour tout  $\omega$  si  $M$  est une variété compacte à bord, ou un domaine (ouvert connexe) relativement compact à bord lisse d'une variété  $\mathcal{C}^\infty$ . Nous avons pris le parti dans ces notes de ne pas nous préoccuper de questions de régularité, mais il doit être clair que cette formule serait par exemple toujours vraie pour un cube de  $\mathbb{R}^n$ . Pour le voir, il suffit d'utiliser la formule ci-dessus sur une suite de sous-variétés  $\mathcal{C}^\infty$  à bord qui approximent le cube. Comme les formes considérées sont intégrables, les différences de calcul provenant d'une petite modification du domaine d'intégration sont négligeables. L'intégrale d'une  $p$ -forme sur une variété «  $\mathcal{C}^\infty$  par morceaux » comme le cube est simplement la somme des intégrales sur les morceaux lisses sur lesquels elle est bien définie, le lieu des singularités étant de mesure nulle.

*Démonstration.* — Soit  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  un atlas de  $M$ , et  $(\chi_\alpha)$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de  $M$  par les  $U_\alpha$ . Par linéarité de l'intégrale, il suffit de prouver

$$\int_{\partial M} \chi_\alpha \omega|_{\partial M} = \int_M d(\chi_\alpha \omega)$$

pour tout  $\alpha$ . On a sur  $U_\alpha$  les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $\partial M \cap U_\alpha$  est donné par l'équation  $x_1 = 0$ . Dans ces coordonnées on note  $dV = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , et  $\omega_\alpha = \varphi_{\alpha*}(\chi_\alpha \omega) = \sum_i f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^n$ . Il y a deux cas.

- Cas où  $U_\alpha \cap \partial M = \emptyset$ . On calcule  $d\omega_\alpha$  :

$$d\omega_\alpha = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} \int_M d\omega_\alpha &= \sum_{i=1}^n \int_{U_\alpha} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = 0 \end{aligned}$$

par Fubini car chaque  $f_i$  est à support compact dans  $\mathbb{R}$ .

- Cas où  $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset$ . L'écriture précédente est toujours valide et on a par Fubini que

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = 0 \text{ si } i \neq 1$$

d'où l'on tire

$$\int_M d\omega_\alpha = \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

tandis que

$$\int_{\partial M} \omega_\alpha = \int_{\{x_1=0\}} f_1 dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

car la forme  $dx_1|_{\{x_1=0\}}$  est identiquement nulle. La formule est en conséquence démontrée grâce à Fubini et l'observation que

$$f_1(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1.$$

**2.6.3.1. Application.** — Nous allons donner comme application des calculs faits jusque ici le cas réel d'une formule qui devrait servir dans le cours de M. Derridj. On peut interpréter un opérateur différentiel de degré 1 sur une variété  $\Omega$  comme un tenseur :

$$L = \sum_{i,j} a_k^j \frac{\partial}{\partial x_j} \otimes dx^k$$

qui lui-même peut être vu comme un endomorphisme du fibré cotangent. On appelle cet endomorphisme le symbole de  $L$  (noté  $\sigma(L)$ ).

On suppose que  $\Omega = \{r < 0\}$  est un domaine relativement compact de  $\mathbb{R}^n$  à bord  $\mathcal{C}^\infty$ , de telle sorte que le fibré tangent est trivial. On a un produit scalaire ponctuel entre les  $p$ -formes donné par

$$\langle F, G \rangle = \sum_I F_I G_I \quad \text{si} \quad F = \sum_I F_I dx^I, G = \sum_I G_I dx^I$$

qui induit le produit scalaire  $L^2$

$$(F, G)_\Omega = \int_\Omega \langle F, G \rangle dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Soit  $u$  une fonction sur  $\Omega$ , et  $v$  une 1-forme. Nous allons montrer la formule

$$(Lu, v)_\Omega = (u, {}^tLv)_\Omega + (\sigma(L) \cdot dr u, v)_{\partial\Omega}. \quad (17)$$

Pour ce faire, nous allons montrer par un calcul en coordonnées locales qu'il existe une extension  $\omega$  de la  $(n-1)$ -forme  $(\sigma(L) \cdot dr u, v) dV_{\partial\Omega}$  qui vérifie la formule

$$d\omega = \langle Lu, v \rangle - \langle u, {}^tLv \rangle dV_{\partial\Omega \cap U} \quad \text{sur } U$$

où  ${}^tL$  est l'adjoint « formel » de  $L$ , c'est-à-dire son adjoint pour la métrique  $L^2$  sur les fonctions à support compact. Ici  ${}^tLv = \sum_k a_k^j \frac{\partial v_j}{\partial x_k}$ .

Sur un voisinage  $U$  d'un point du bord de  $\Omega$ , on peut choisir des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  telles que  $r = x_1$  (car  $dr \neq 0$  au bord de  $\Omega$ ). Posons  $\omega = \sum_{j,k} a_k^j uv_k dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}^j \wedge \dots \wedge dx^n$ . Alors

$$\omega|_{\partial\Omega \cap U} = \sum_k a_k^1 uv_k dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = (\sigma(L) \cdot dr u, v) dV_{\partial\Omega \cap U}$$

et

$$d\omega = \sum_{j,k} a_k^j \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} v_k + u \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad \text{sur } U$$

donc

$$\int_U d\omega = (Lu, v)_U - (u, \mathring{L}v)_U.$$

D'après la formule de Stokes nous aboutissons à

$$(Lu, v)_U = (u, \mathring{L}v)_U + (\sigma(L) \cdot dr u, v)_{\partial U}$$

sur un ouvert admettant de telles coordonnées. Pour conclure, il suffit de remarquer que le calcul de l'intégrale sur  $U$  ne dépend pas des coordonnées locales, puis de se convaincre qu'une intégrale sur  $\Omega$  n'est rien d'autre qu'une somme d'intégrales sur un pavage<sup>9</sup> de  $\Omega$  subordonné à un atlas de  $\bar{\Omega}$  et que les termes de bord « intérieurs » s'annulent deux à deux.

#### 2.6.4. Lemme de Poincaré.

DÉFINITION 2.11. — Une  $p$ -forme différentielle est dite exacte si elle est la différentielle extérieure d'une  $(p-1)$ -forme différentielle. On appelle parfois les formes exactes des bords, voire des cobords.

Une  $p$ -forme différentielle est dite fermée si sa différentielle extérieure est nulle. On appelle souvent les formes fermées des cycles ou des cocycles.

La relation fondamentale  $d^2 = 0$  revient à dire qu'une forme exacte est toujours fermée. Le problème de savoir si réciproquement une forme fermée est nécessairement exacte a fait couler beaucoup d'encre. Quoi qu'il en soit, on a toujours une réponse *locale* satisfaisante. On appelle opérateur d'homotopie  $A$  (de degré  $-1$ ) pour  $d$  un opérateur linéaire agissant sur les formes différentielles et vérifiant la formule

$$\forall \omega \in \bigwedge^p T^*X, \quad \omega = d(A\omega) + A(d\omega). \quad (18)$$

Dans le cas où un tel opérateur existe, le problème envisagé a une solution très satisfaisante, puisque, si  $\omega$  est fermée, l'égalité (18) implique immédiatement qu'elle est exacte, mais en outre l'opérateur  $A$  donne directement une « primitive » de  $\omega$  : lorsque l'on connaît explicitement cet opérateur, on peut par exemple contrôler précisément la régularité des solutions.

THÉORÈME 2.12 (Lemme de Poincaré). — Si  $U$  est un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^n$ , il existe un opérateur d'homotopie  $A$  pour la différentiation extérieure  $d$  agissant sur les  $p$ -formes différentielles  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$  pour  $p \geq 1$ .

Remarque. — Si  $p = 0$ , le problème ne peut se poser de la même façon. En effet, une forme fermée de degré 0 est une fonction de différentielle nulle, donc localement constante, et les cycles en degré 0 n'existent pas (on convient en général qu'ils sont nuls). Une fois le théorème 2.12 connu, son énoncé se transporte par pull-back à tout ouvert qui lui est difféomorphe,

9. En faisant usage de la remarque du § 2.6.3, un tel pavage peut être un simple découpage selon des cubes de  $\mathbb{R}^n$ .

ce qui donne l'énoncé apparemment plus général suivant : Si  $U$  est un ouvert contractile d'une variété  $M$  sans bord, il existe un opérateur d'homotopie pour la différentiation extérieure agissant sur les  $p$ -formes différentielles  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$  pour  $p \geq 1$ .

*Démonstration.* — On suppose sans perte de généralité  $U$  étoilé autour de  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Alors on peut définir l'application  $\mathcal{C}^\infty$  (qui a à voir avec une rétraction de  $U$  sur le point 0, d'où la terminologie)

$$\begin{aligned} h : ]0,1[ \times U &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\mapsto tx. \end{aligned}$$

Notons  $\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I dx^I$  une  $p$ -forme différentielle  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$  (avec  $p \geq 1$ ), alors il existe une décomposition  $h^* \omega = \omega_1 + dt \wedge \omega_0$  où les  $\omega_i$  ne sont pas divisibles par  $dt$ . On définit l'opérateur  $A$  par

$$A(\omega) = \int_0^1 \omega_0 dt. \quad (19)$$

Cette intégrale est à prendre au sens de l'intégration des fonctions sur  $\mathbb{R}$  à valeurs vectorielles : on intègre chaque fonction coordonnée  $\omega_0^J$  par rapport à  $t$ . Il est immédiat que  $A(\omega)$  est une  $(p-1)$ -forme  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$ , que l'on peut considérer comme la moyenne de  $\omega$  sur le segment  $[0,x] \subset U$ . Pour une  $p$ -forme  $\xi = \sum_I \xi_I dx^I$  sur  $]0,1[ \times U$  qui n'est pas divisible par  $dt$  nous prendrons la notation  $d\xi = d'\xi + dt \wedge \frac{\partial \xi}{\partial t}$  qui est la factorisation par rapport à  $dt$  de  $d\xi$  comme précédemment. On a  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \sum_I \frac{\partial \xi_I}{\partial t} dx^I$  et  $d'$  est une différentiation partielle qui se calcule comme si  $t$  était constant. Avec ces notations,

$$h^*(d\omega) = dh^* \omega = d\omega_1 - dt \wedge d\omega_0 = d'\omega_1 + dt \wedge \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial t} - d'\omega_0 \right)$$

ce qui implique

$$A(d\omega) = \int_0^1 \frac{\partial \omega_1}{\partial t} dt - \int_0^1 (d'\omega_0) dt.$$

Comme  $\omega_1 = \sum_I t^p \omega_I dx^I$ ,

$$\int_0^1 \frac{\partial \omega_1}{\partial t} dt = \omega$$

mais on a aussi

$$\int_0^1 (d'\omega_0) dt = d \int_0^1 \omega_0 dt = A(\omega)$$

ce qui conclut l'argument.

*Exercice.* — Exprimer les calculs de cette section en coordonnées, et en déduire une preuve élémentaire du lemme de Poincaré qui ne fasse intervenir que des calculs d'intégrales et de dérivations partielles de  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.6.5. Notion de cohomologie.

Le lemme de Poincaré peut être vu comme un théorème d'annulation de la cohomologie du complexe de de Rham sur un ouvert contractile en degré  $\geq 1$ . J'explique ici brièvement cette interprétation qui sera développée plus abondamment dans d'autres cours.

Un *complexe*<sup>10</sup> d'espaces vectoriels est une suite d'applications linéaires

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \cdots \xrightarrow{f_k} E_{k+1} \quad (*)$$

telle que l'image de l'une est toujours contenue dans le noyau de la suivante ( $f_k \circ f_{k-1} = 0$ ). On peut donc prendre le quotient de l'un par l'autre, qui mesure la « distance » qu'il y a entre les deux conditions linéaires « être dans le noyau de  $f_k$  » et « être dans l'image de  $f_{k-1}$  ». On appelle ce quotient le groupe<sup>11</sup> de cohomologie du complexe (\*) en degré  $k$ . Un complexe est dit *exact* si sa cohomologie est nulle.

Sur une variété réelle  $M$  de dimension  $n$ , le fait que  $d^2 = 0$  nous permet de définir le *complexe de de Rham*

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_1^\infty(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{C}_n^\infty(M) \xrightarrow{d} 0 \quad (29)$$

dont la cohomologie s'appelle *cohomologie de de Rham*. Nous avons montré au § précédent que, si  $U$  est une variété difféomorphe à un ouvert contractile de  $\mathbb{R}^n$ , les groupes de de Rham  $H^p(U, \mathbb{R})$  sont nuls pour tout  $p \geq 1$ ; et  $H^0(U, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ .

Ceci détermine complètement la cohomologie locale des variétés sans bord, qui ne dépend en fait pas de la géométrie de la variété car elle se ramène toujours à un problème local sur  $\mathbb{R}^n$ . Mais le complexe 20 est défini globalement sur  $M$ , il existe donc des groupes de cohomologie *globaux*  $H^p(M, \mathbb{R})$  qui sont des invariants de la structure différentielle<sup>12</sup> de  $M$ .

*Exemples :*

1. Si  $M$  est une variété  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $H^0(M, \mathbb{R})$  est un espace vectoriel dont la dimension (finie) vaut le nombre de composantes connexes de  $M$ .
2. Si  $M$  est orientable sans bord de dimension  $n$ ,  $H^n(M, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ . Ceci est une conséquence de la formule de Stokes qui implique dans ce cas que l'intégrale d'une forme exacte est nulle.

*Exercices :*

1. L'exemple le plus simple de calcul de cohomologie de de Rham est donné par le tore  $\mathbb{T}^n$ . En travaillant dans un domaine fondamental, avec les formules explicites du § 2.6.4, montrer que la cohomologie en degré  $p$  s'identifie avec l'espace des formes différentielles de degré  $p$  invariantes sur  $\mathbb{T}^n$  par le groupe des translations. Ces dernières s'identifiant à un élément de  $\bigwedge^p \mathbb{R}^n$ , montrer que  $\dim H^p(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}) = \mathbf{C}_n^p$  pour tout  $p, n$ .
2. Montrer en revanche que la cohomologie en degré  $\neq 0, n$  ne distingue pas  $\mathbb{R}^n$  de  $\mathbb{S}^n$ .

Pour approfondir cette théorie, la référence la plus accessible est certainement [dR55].

10. On trouvera peut-être qu'il y a trop de *co-* dans cette théorie, c'est qu'elle est (en général) duale de la théorie plus ancienne de l'homologie des simplexes. Par exemple, dans une variété, une sous-variété sans bord est un *cycle* (de façon imagée : s'il n'y a pas de bord, c'est que la sous-variété se referme sur elle-même) tandis que le bord d'une sous-variété sera un *bord*. L'homologie mesure l'obstruction qu'il y a pour un cycle à être un bord tandis que la cohomologie compare les cocycles et les cobords...

11. Il s'agit d'un espace vectoriel dans ce cas, c'est encore pour des raisons historiques que l'on se contente de la structure de groupe (additif) dans la terminologie.

12. En fait topologique, mais ce serait plus long à justifier...

### 3. Structures complexes

Les outils fondamentaux de l'analyse, y compris complexe — en particulier l'intégration, les formes différentielles — sont par nature des objets réels. Cependant, l'étude des fonctions holomorphes de plusieurs variables, ou des structures  $CR$  ne se limite pas à cet arrière-plan qu'il ne faut pourtant pas oublier. Je vais m'efforcer de préciser ce qui a été fait jusque ici dans le cas général, du point de vue des structures analytiques complexes.

#### 3.1. Structures presque complexes sur une variété $\mathcal{C}^\infty$ , bidegré

Sur une variété réelle  $M$  de dimension paire  $2n$ , on peut évidemment identifier ponctuellement  $T_x M \simeq \mathbb{C}^n$ . Cette identification est bien définie globalement si la variété  $M$  est holomorphe car  $T_x M$  est l'image de l'application linéaire tangente d'une paramétrisation locale *holomorphe* donc à tangente  $\mathbb{C}$ -linéaire.

**DÉFINITION 3.1.** — Une structure presque complexe sur une variété  $M$  de dimension  $2n$  est une section  $J$  du fibré des endomorphismes de  $TM$  qui vérifie  $J \circ J = -\text{Id}_{TM}$ .

Si on se donne une structure presque complexe sur  $M$ , un grand nombre d'objets essentiels à la géométrie complexe peuvent être définis.

**3.1.0.1. Tangent complexe,  $(p, q)$ -formes.** — Le dual de l'espace des différentielles de fonctions à valeurs complexes sur  $M$  (au sens de la remarque du § 1.2.2) est le complexifié  $\Theta$  de son fibré tangent réel (de rang — complexe —  $2n$ ). L'action de  $J$  s'étend naturellement à  $\Theta$  et, comme  $J^2 = -\text{Id}_\Theta$ ,  $J_x$  a en chaque point  $x$  2 espaces propres (de valeur propre resp.  $i$  et  $-i$ ) d'égale dimension (car la trace est réelle) complexe  $n$  que l'on va noter temporairement  $T_{\mathbb{C}}M$  et  $\overline{T_{\mathbb{C}}M}$ . Le premier est le tangent complexe de  $M$ , lorsqu'il sera clair que nous parlons d'une variété holomorphe, nous omettrons l'indice  $\mathbb{C}$ ; le second est son conjugué. On a donc une décomposition en somme directe de fibrés vectoriels complexes

$$T_{\mathbb{R}}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T_{\mathbb{C}}M \oplus \overline{T_{\mathbb{C}}M}$$

(les espaces propres d'un endomorphisme de fibré sont des sous-fibrés en vertu de la proposition 1.20). Par linéarité, l'action de  $J$  est définie à tous les tenseurs. Une  $k$ -forme à valeurs complexes est un élément du complexifié de

$$\bigwedge^k T^*M \simeq \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^p T_{\mathbb{C}}^*M \otimes \bigwedge^q \overline{T_{\mathbb{C}}^*M}. \quad (21)$$

Le *bidegré*<sup>13</sup> d'une forme différentielle à valeurs complexes sur  $M$  est le couple  $(p, q)$  correspondant au scindage ci-dessus. Pour éviter toute confusion,  $k$  est dit *degré total*.

**3.1.0.2. Intégrabilité d'une structure complexe.** — À cause du scindage (21) en degré total 1, si  $\omega \in T_{\mathbb{C}}^*M$ ,  $d\omega = \omega_{(2,0)} + \omega_{(1,1)} + \omega_{(0,2)}$  où  $\omega_{(p,q)}$  est la composante de bidegré  $(p, q)$  de  $d\omega$ . On en déduit que la différentielle d'une  $(p, q)$ -forme a au plus 4 composantes de bidegré  $(p-1, q+2)$ ,  $(p, q+1)$ ,  $(p+1, q)$  ou  $(p+2, q)$ . Nous allons voir au § suivant que les

<sup>13</sup> Qu'on appelle aussi parfois *type*, ce que j'éviterai ici à cause de la définition conflictuelle donnée pour les tenseurs au § 1.3.2.

deux bidegrés extrêmes sont nuls si  $M$  est une variété holomorphe. Un théorème de Newlander et Nirenberg affirme que cette condition est suffisante, à savoir qu'une structure presque complexe provient d'une structure complexe si et seulement si la différentiation extérieure ne diminue pas le degré partiel.

**3.1.0.3. Le cas des variétés holomorphes.** — Si la variété  $M$  est holomorphe, elle est localement paramétrée par des applications  $\varphi_\alpha$ , et le fibré tangent est donné par les automorphismes de transition  $\tau_{\alpha\beta} = d\varphi_{\alpha\beta}$  qui sont des applications  $\mathbb{C}$ -linéaires de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^n$  (parce que  $\varphi_{\alpha\beta}$  est *holomorphe* : nous pouvons prendre ceci pour définition). Par conséquent, la multiplication par  $i$  commute avec  $\tau_{\alpha\beta}$ , ce qui montre qu'elle définit bien une structure presque complexe naturelle. On identifie  $\mathbb{C}^n$  et  $\mathbb{R}^{2n}$  par l'application

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$$

où  $z_j = x_j + iy_j$ . Les  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  forment donc un système de coordonnées locales pour la variété  $M$  munie de sa structure réelle sous-jacente. Ceci nous donne un champ de repères sur le tangent à  $M$  : les  $\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}$  qui définissent donc une base de  $\Theta$  dans laquelle l'action de  $J$  est décrite par

$$J \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J \frac{\partial}{\partial y_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}$$

ce qui revient à dire que les champs de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j})$  forment une base de  $TM$  tandis que leurs conjugués  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j})$  forment une base de  $\bar{TM}$ . La différentielle de l'application de coordonnées locales s'écrit

$$(dz_1, \dots, dz_n) \simeq (dx_1, idy_1, \dots, dx_n, idy_n).$$

Comme elle est  $\mathbb{C}$ -linéaire, chaque 1-forme  $dz_j = dx_j + idy_j$  commute avec  $J$ , donc est de bidegré  $(1,0)$  : on a  ${}^t J \cdot dz_j = d(iz_j) = idz_j$  tandis que  $d\bar{z}_j$  est de bidegré  $(0,1)$  car  ${}^t J \cdot d\bar{z}_j = -id\bar{z}_j$ . L'espace tangent holomorphe à  $M$  est donc localement engendré par les différentielles (à valeurs complexes) des fonctions *holomorphes* sur  $M$  tandis que les fonctions antiholomorphes (leurs conjuguées) engendrent  $\bar{T}^*M$ .

**3.1.0.4. Les variétés holomorphes sont orientables.** — Terminons ce survol rapide de la géométrie complexe par une propriété fondamentale des variétés *holomorphes*, qui est une conséquence immédiate du

LEMME 3.2. — Soit  $f : V_1 \rightarrow V_2$  une application holomorphe d'un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  vers un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ . Notons  $J_{\mathbb{R}}(f)$  le jacobien usuel de  $f$  vue comme application différentiable sur un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $J_{\mathbb{C}}(f) = \det(\partial f_j / \partial z_k)$  son analogue complexe (i.e. le déterminant de l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire tangente à  $f$ , définie sur le tangent complexe de  $V_1$ ). Alors

$$J_{\mathbb{R}}(f) = |J_{\mathbb{C}}(f)|^2.$$

*Démonstration.* — Tout d'abord,  $\frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_j = dx_j \wedge dy_j$ . Ensuite,

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n &= \left(\frac{i}{2}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n \\ &= \frac{i^{n^2}}{2^n} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$f^*(dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n) = J_{\mathbb{R}}(f) dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

tandis que

$$f^*(dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n) = J_{\mathbb{C}}(f) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$$

d'où

$$\begin{aligned} f^*(dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n) &= \frac{i^{n^2}}{2^n} f^*(dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n) \\ &= J_{\mathbb{C}}(f) \overline{J_{\mathbb{C}}(f)} \frac{i^{n^2}}{2^n} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n \\ &= |J_{\mathbb{C}}(f)|^2 dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n, \end{aligned}$$

ce qui prouve qu'une application biholomorphe a toujours un jacobien réel  $> 0$ , donc que les changements de cartes holomorphes préservent toujours l'orientation.

### 3.2. Opérateur $\bar{\partial}$

Désormais, toutes les variétés seront holomorphes, munies de leur structures presque complexe canonique. Reprenons dans ce contexte les calculs où nous les avons laissés à l'alinéa 3.1.0.2. La différentielle d'une fonction à valeurs complexes est une 1-forme, donc se décompose en une somme de deux 1-formes de bidegré pur :

$$df = d'f + d''f. \quad (22)$$

De plus,  $f$  est holomorphe si et seulement si sa différentielle est une section du fibré  $TM$  (car la différentielle est  $\mathbb{C}$ -linéaire si et seulement si elle commute avec  $J$ ) donc  $f$  est holomorphe si et seulement si  $d''f = 0$ .

Comme le cotangent holomorphe est engendré localement par les différentielles de fonctions holomorphes, une  $(p,q)$ -forme s'écrit localement  $\omega = \sum_{|I|=p, |J|=q} \omega_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J$  et par conséquent le calcul de sa différentielle se ramène à celui-là

$$d(\omega_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J) = \sum_j \frac{\partial}{\partial z_j} \cdot \omega_{I,J} dz^j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J + \sum_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \cdot \omega_{I,J} d\bar{z}^j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

Il existe donc un unique opérateur  $d'$  (resp.  $d''$ ) de bidegré  $(1,0)$  (resp.  $(0,1)$ ) tel que  $d = d' + d''$  sur toutes les  $p$ -formes à valeurs complexes sur  $M$ .

**DÉFINITION 3.3.** — On appelle<sup>14</sup>  $\bar{\partial}$  l'opérateur  $d''$  défini ci-dessus. On note par analogie  $\partial$  l'opérateur  $d'$  défini ci-dessus<sup>15</sup>

**3.2.0.5. Propriétés.** — Nous listons ci-dessous les propriétés utiles de  $\partial$  et  $\bar{\partial}$ .

14. Se prononce comme ça s'écrit.

15. Attention, il ne s'agit pas d'opérateurs de dérivation partielles mais de différentiation extérieure.

1. — La transposition par une application holomorphe préserve le bidegré. En effet, si  $f : m \rightarrow N$  est holomorphe, et  $\omega$  une  $(p, q)$ -forme, on a en coordonnées locales

$$f^* \omega = \sum_{I, J} \omega_{I, J} \circ f \, d f^I \wedge \bar{d} \bar{f}^J$$

qui est également de bidegré  $(p, q)$  car les  $d f_j$  sont de bidegré  $(1, 0)$ . En conséquence, si  $f$  est holomorphe, on a les commutations suivantes :

$$f^* \partial \omega = \partial f^* \omega ; \quad f^* \bar{\partial} \omega = \bar{\partial} f^* \omega$$

qui se déduisent de la formule 2.7 en séparant les bidegrés  $(p+1, q)$  et  $(p, q+1)$ .

2. —  $\partial$  et  $\bar{\partial}$  anticommulent, et sont de carré nul, ce qui se voit encore en cassant en bidegrés purs la formule  $d^2 = 0$ . Comme se vérifie la dernière propriété :

3. —  $\partial$  et  $\bar{\partial}$  sont des antidérivations de degré 1.

Si  $E$  est un fibré vectoriel holomorphe au dessus d'une variété analytique complexe  $M$ , une  $(p, q)$ -forme à valeurs dans  $E$  est une section  $\mathcal{C}^\infty$  du fibré  $\wedge^{p, q} T^* M \otimes E$ . Notez que ce fibré n'est pas holomorphe si  $q > 0$ . On notera  $\mathcal{C}_{p, q}^\infty(M, E)$  l'espace de ces  $(p, q)$ -formes. L'espace des  $p$ -formes holomorphes à valeurs dans  $E$  est donné par les sections holomorphes du fibré (holomorphe)  $\wedge^{p, 0} T^* M \otimes E = \wedge^p T_{\mathbb{C}}^* M \otimes E$ .

PROPOSITION 3.4. — Soit  $E \xrightarrow{\pi} M$  un fibré vectoriel holomorphe de rang  $r$ , il existe un unique opérateur (noté  $\bar{\partial}$ ) qui coïncide dans les trivialisations locales avec l'opérateur  $\bar{\partial}$  de la définition 3.3.

Démonstration. — Soit  $(s_1, \dots, s_r)$  un repère local de  $E$ , et  $(z_1, \dots, z_n)$  des coordonnées locales sur la base. Une  $(p, q)$ -forme sur  $M$  à valeurs dans  $E$  a pour expression en coordonnées locales

$$\omega = \sum_{I, J, \nu} \omega_{\nu}^{I, J} dz^I \wedge \bar{d} \bar{z}^J \otimes s_{\nu}$$

où les coefficients  $\sum_{\nu} \omega_{\nu}^{I, J} s_{\nu}$  sont des sections locales de  $E$ . L'opérateur défini par  $\bar{\partial}$  dans une trivialisations  $\varphi_{\alpha}$  de  $E$  est déterminé par

$$\bar{\partial} \left( \sum_{\nu} \omega_{\nu}^{I, J} s_{\nu} \right) = \sum_{\nu, l} \frac{\partial \omega_{\nu}^{I, J}}{\partial \bar{z}_l} d \bar{z}^l \otimes s_{\nu}$$

donc par son calcul sur les sections  $(\mathcal{C}^\infty)$  de  $E$ .

Si  $U_{\alpha}, U_{\beta}$  sont deux ouverts de trivialisations de  $E$ , sur lesquels on a les repères  $(s_1^{\alpha}, \dots, s_r^{\alpha})$  et  $(s_1^{\beta}, \dots, s_r^{\beta})$ , et  $\sigma$  est une section de  $E$  définie sur  $U_{\alpha\beta}$  avec  $\sigma = \sum_{\nu=1}^r \sigma_{\nu}^{\alpha} s_{\nu}^{\alpha} = \sum_{\mu=1}^r \sigma_{\mu}^{\beta} s_{\mu}^{\beta}$ , la relation de compatibilité (8) s'écrit en coordonnées :

$$\sigma_{\beta}^{\mu} = \sum_{\nu} \tau_{\beta\alpha}^{\mu\nu} \sigma_{\alpha}^{\nu}$$

avec  $\tau_{\beta\alpha} = \sum_{\nu, \mu} \tau_{\beta\alpha}^{\mu\nu} s_{\mu}^{\beta} \otimes (s_{\nu}^{\alpha})^*$ . Le fibré  $E$  étant holomorphe, ses automorphismes de transition sont holomorphes, donc les coefficients  $\tau_{\beta\alpha}^{\mu\nu} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}$  sont des applications holomorphes, ce qui signifie que

$$\frac{\partial \tau_{\beta\alpha}^{\mu\nu}}{\partial \bar{z}_l} = 0$$

pour tout  $l$ . Donc

$$\frac{\partial \sigma_\beta^\mu}{\partial \bar{z}_l} = \sum_\nu \tau_{\beta\alpha}^{\mu\nu} \frac{\partial \sigma_\alpha^\nu}{\partial \bar{z}_l} = \tau_{\beta\alpha} \left( \frac{\partial \sigma_\alpha^\nu}{\partial \bar{z}_l} \right).$$

Ceci signifie que les  $\partial s / \partial \bar{z}_l$  sont bien définies en tant que sections de  $E$ , donc que  $\bar{\partial} s = \sum_l \partial s / \partial \bar{z}_l \otimes d\bar{z}_l$  se recolle comme prévu.

*Remarque.* — Il n'y a pas de résultat analogue pour l'opérateur  $\partial$  car on n'a pas  $\partial \tau_{\beta\alpha} = 0$ , de même qu'il n'y a pas d'opérateur  $d$  canonique sur les fibrés vectoriels réels. Le problème revient à se donner une connexion, ce qui est équivalent à fixer une métrique sur les fibres. On sort alors du strict calcul différentiel pour entrer dans la géométrie riemannienne ou hermitienne. Dans ce contexte, une connexion réelle se décomposera en une composante antiholomorphe déterminée par la structure complexe ( $\bar{\partial}$ ) et une composante de type  $\partial$  non canonique.

### 3.3. Lemme de Dolbeault-Grothendieck

Le lemme de Dolbeault-Grothendieck joue en analyse complexe le même rôle que le lemme de Poincaré en analyse réelle. J'en donne ici une démonstration simple qui n'est pas la plus soignée du point de vue de la régularité, mais qui est assez proche de la démonstration originale. Pour  $R = (R_1, \dots, R_n) \in \mathbb{R}_+^n$ , on note  $D(0, R) = \{|z_1| < R_1; \dots; |z_n| < R_n\} \subset \mathbb{C}^n$  un *polydisque*.

**THÉORÈME 3.5.** — Soit  $q \geq 1$ . Si  $\omega \in \mathcal{C}_{p,q}^\infty(D(0, R))$  est une  $(p, q)$ -forme  $\mathcal{C}^\infty$  sur un polydisque  $\bar{\partial}$ -fermée, alors il existe  $\omega' \in \mathcal{C}_{p,q-1}^\infty(D(0, R))$  telle que  $\bar{\partial}\omega' = \omega$ .

*Démonstration.* — Nous commençons par un lemme élémentaire.

**LEMME 3.6.** — Soient  $K, L, L'$  des compacts de (resp.)  $\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^m$ . On pose  $S = K \times L \times L'$  et on note  $(z, t, w)$  un point de  $S$ . Si  $g$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur un voisinage de  $S$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , holomorphe par rapport à  $w$  ( $\bar{\partial}$  à  $z, t$  fixés), il existe une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty$  sur un voisinage de  $S$ , holomorphe par rapport à  $w$ , telle que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$$

au voisinage de  $S$ .

*Démonstration.* — Quitte à multiplier  $g$  par une fonction plateau (égale à 1 sur  $S$ , à support compact dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^m$ ), on peut supposer que  $g$  est à support compact. On pose

$$\begin{aligned} f(z, w, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta, w, t)}{\zeta - z} d\lambda(\zeta) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta + z, w, t)}{\zeta} d\lambda(\zeta) \end{aligned}$$

où  $d\lambda$  note la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{C}$ . Par dérivation sous l'intégrale, et en remarquant que  $d\lambda(\zeta)dV_{\mathbb{C}} = \frac{i}{2}d\bar{\zeta} \wedge d\zeta$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, w, t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z + \zeta, w, t) d\bar{\zeta} \wedge d\zeta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta| \geq \varepsilon} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(z + \zeta, w, t) d\bar{\zeta} \wedge d\zeta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta| \geq \varepsilon} d\zeta \left( \frac{1}{\zeta} g(z + \zeta, w, t) d\zeta \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta| = \varepsilon} \frac{1}{\zeta} g(z + \zeta, w, t) d\zeta \quad \text{par le théorème de Stokes} \\ &= g(z, w, t) \quad \text{car } g \text{ est continue en } z \text{ et } \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta| = \varepsilon} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 1. \end{aligned}$$

Le cœur de la démonstration est donné par ce second

LEMME 3.7. — Soit  $q \geq 1$ . Si  $K_1, \dots, K_n$  sont des compacts de  $\mathbb{C}$ . Si  $\omega$  est une  $(p, q)$ -forme  $\mathcal{C}^\infty$  sur un voisinage de  $S = K_1 \times \dots \times K_n$  telle que  $\bar{\partial}\omega = 0$  alors il existe une  $(p, q-1)$ -forme  $\mathcal{C}^\infty$  sur un voisinage de  $S$   $\omega'$  telle que  $\bar{\partial}\omega' = \omega$  au voisinage de  $S$ .

*Démonstration.* — On pose  $\mathcal{A}_k^{p,q}$  l'espace des  $(p, q)$ -formes ( $\mathcal{C}^\infty$  sur un voisinage de  $S$ ) qui s'écrivent  $\omega = \sum_{I, J} \omega_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$  avec  $J \subset \{1, \dots, k\}$ . Nous allons démontrer le lemme 3.7 pour les formes de  $\mathcal{A}_k^{p,q}$  par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 0$   $\omega = 0$  : il n'y a rien à vérifier. Supposons le lemme vérifié par les éléments de  $\mathcal{A}_k^{p,q}$  et soit  $\omega$  un élément de  $\mathcal{A}_{k+1}^{p,q}$ . On peut écrire  $\omega = d\bar{z}_{k+1} \wedge \omega_1 + \omega_2$  où  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{A}_k^{p,q}$  d'où  $\bar{\partial}\omega = -d\bar{z}_{k+1} \wedge \bar{\partial}\omega_1 + \bar{\partial}\omega_2$ . On introduit la notation  $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_l} = \sum_{I, J} \frac{\partial \omega_{IJ}}{\partial \bar{z}_l} dz^I \wedge d\bar{z}^J$  de telle sorte que  $\bar{\partial}\omega = \sum_l d\bar{z}_l \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_l}$ . En comparant les termes qui sont divisibles par  $d\bar{z}_l$  pour  $l > k+1$ , on voit que  $\bar{\partial}\omega = 0$  implique qu'ils sont nuls, i.e.  $\frac{\partial \omega_j}{\partial \bar{z}_l} = 0$  pour  $l > k+1$  et  $j = 1, 2$ . Par conséquent, les  $\omega_{IJ}$  sont holomorphes par rapport aux coordonnées  $(z_{k+2}, \dots, z_n)$ . Le lemme 3.6 entraîne l'existence d'une  $(p, q-1)$ -forme  $\chi \in \mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $S$ , dont les coefficients sont holomorphes par rapport au  $z_l$  pour  $l > k+1$  et telle que  $\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_{k+1}} = \omega_1$ . Mais alors

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\chi &= \sum_j d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_l} \\ &= d\bar{z}_{k+1} \wedge \omega_1 + \sum_{j \leq k} d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_l}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\omega - \bar{\partial}\chi \in \mathcal{A}_k^{p,q}$ . Comme  $\bar{\partial}(\omega - \bar{\partial}\chi) = \bar{\partial}\omega = 0$ , l'hypothèse de récurrence s'applique : il existe une forme  $\psi$  telle que  $\omega - \bar{\partial}\chi = \bar{\partial}\psi$  donc

$$\omega = \bar{\partial}(\chi + \psi).$$

*Démonstration du théorème 3.5.* — On pose  $D = D(0, R)$  et  $D_k = D(0, R(1 - 2^{-k-1}))$  pour  $k \geq 0$ . Comme le fibré  $\wedge^p T^* \mathbb{C}^n$  est le fibré holomorphe trivial, on peut raisonner sur les  $(0, q)$ -formes  $\omega_I = \sum_{|J|=q} \omega_{I, J} d\bar{z}_J$  puisque le  $\bar{\partial}$  agit séparément sur chacune de ces composantes. On fait à nouveau une récurrence : sur  $q$ .

• Cas  $q = 1$ . Par la théorie des paires de Runge, les fonctions holomorphes sur  $D_k$  sont limites uniformes sur tout compact de  $D_k$  de fonctions holomorphes sur  $D$ . Si  $\omega \in \mathcal{C}_{0,1}^\infty(D)$  vérifie  $\bar{\partial}\omega = 0$ , il existe pour tout  $k$  une fonction  $f_k \in \mathcal{C}^\infty(D_k)$  telle que

$$\bar{\partial} f_k = \omega \text{ sur } D_k$$

d'après le lemme 3.6. Comme  $\bar{\partial}(f_{k+1} - f_k) = 0$  sur  $D_k$ ,  $f_{k+1} - f_k$  est une fonction holomorphe sur  $D_k$ . Il existe par conséquent une fonction  $g_k$  holomorphe sur  $D$  vérifiant

$$|f_{k+1} - f_k - g_k| \leq \frac{1}{2^k} \text{ sur } D_{k-1}.$$

On pose  $\tilde{f}_k = f_k - g_1 - \dots - g_{k-1}$ . La suite  $\tilde{f}_k$  est uniformément de Cauchy sur tout compact de  $D$ , elle converge donc vers une fonction  $\mathcal{C}^\infty$   $\omega'$  sur  $D$ . On a bien  $\bar{\partial}\omega' = \bar{\partial}\tilde{f}_k = \omega$  sur  $D_k$  car  $\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k$  est une fonction holomorphe sur  $D_k$  pour tout  $k$ .

• Cas  $q \geq 2$ . Si  $\bar{\partial}\omega = 0$  sur  $D$ , on a toujours par le lemme 3.7 une suite de  $(0, q-1)$ -formes  $\omega_k$  sur  $D_k$  telles que  $\bar{\partial}\omega_k = \omega$  sur  $D_k$ . Comme  $q-1 \geq 1$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\omega_{k+1} - \omega_k$  : il existe donc une  $(0, q-2)$ -forme  $\chi_k$  sur  $D_k$  telle que  $\bar{\partial}\chi_k = \omega_{k+1} - \omega_k$  sur  $D_k$ . Il ne reste plus qu'à poser

$$\omega' = \begin{cases} \omega_0 \text{ sur } D_0 \\ \omega_k - \bar{\partial}\chi_{k-1} - \dots - \bar{\partial}\chi_0 \text{ sur } D_k. \end{cases}$$

En effet, il est évident que  $\bar{\partial}\omega' = \omega$  sur  $D_k$  pour tout  $k$  donc sur  $D$ . D'autre part, cette définition est cohérente car  $(\omega_{k+1} - \bar{\partial}\chi_k - \dots - \bar{\partial}\chi_0) - (\omega_k - \bar{\partial}\chi_{k-1} - \dots - \bar{\partial}\chi_0) = \omega_{k+1} - \omega_k - \bar{\partial}\chi_k = 0$  sur  $D_k$ .

### 3.4. Cohomologie de Dolbeault

Soit  $M$  une variété holomorphe de dimension  $n$ , et  $E \xrightarrow{\pi} M$  un fibré vectoriel holomorphe de rang  $r$  au dessus de  $M$ . En vertu de la proposition précédente 3.4, il existe un opérateur  $\bar{\partial}$  agissant sur les  $(p, q)$ -formes  $\mathcal{C}^\infty$  à valeurs dans  $E$  tel que  $\bar{\partial}^2 = 0$ . Ceci, avec les considérations du § 2.6.5, nous amène à définir pour chaque  $p$  le *complexe de Dolbeault* associé à un fibré  $E$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{p,0}^\infty(M, E) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{C}_{p,1}^\infty(M, E) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{C}_{p,n}^\infty(M, E) \xrightarrow{\bar{\partial}} 0 \quad (23)$$

dont la cohomologie est dite *cohomologie de Dolbeault*. Les groupes de cohomologie en degré  $q$  du complexe (23) sont notés  $H^{p,q}(M, E)$  et peuvent aussi s'interpréter comme la cohomologie  $H^q(M, \Omega_M^p \otimes E)$  du faisceau analytique cohérent des  $p$ -formes *holomorphes* à valeurs dans  $E$ .

Si  $U$  est un ouvert d'une variété analytique complexe biholomorphe à un polydisque, le lemme de Dolbeault-Grothendieck affirme donc que les groupes  $H^{p,q}(U, E)$  sont nuls pour  $q > 1$ .

*Exercices :*

1. Le tangent au tore complexe de dimension  $n$  est (holomorphiquement) trivial (i.e. il existe  $n$  champs de vecteurs  $\xi_j \in T_{\mathbb{C}}M$ ,  $j = 1, \dots, n$  linéairement indépendants en tout point).

2. Déterminer toutes les sections globales de  $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  (toutes les 1-formes différentielles globales. En déduire que  $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  n'est pas holomorphiquement trivial, mais qu'il est globalement engendré (il existe en chaque point de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  une section globale de  $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  non nulle).
3. On définit le fibré en droites *tautologique*  $\mathcal{O}(-1)$  sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  ensemblistement comme le sous-fibré du fibré trivial  $\mathbb{C}^{n+1}$  dont la fibre au-dessus d'un point de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  est précisément la droite de  $\mathbb{C}^{n+1}$  représentée par ce point. On note  $\mathcal{O}(1)$  le fibré dual, puis  $\mathcal{O}(k)$  la  $k$ -ème puissance tensorielle de  $\mathcal{O}(1)$  pour  $k \geq 0$ , la  $|k|$ -ème puissance tensorielle de  $\mathcal{O}(-1)$  pour  $k < 0$ . Montrer que les sections globales de  $\mathcal{O}(k)$  sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  s'identifient naturellement aux polynômes homogènes de degré  $k$  en les variables homogènes sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . En déduire que  $\mathcal{O}(k)$  n'a aucune section globale si  $k < 0$ .

### Bibliographie

- [BG72] Marcel BERGER and Bernard GOSTIAUX. *Géométrie différentielle*. Armand Colin, 1972.
- [Die70] Jean DIEUDONNÉ. *Éléments d'analyse (III)*. Gauthier-Villars, 1970.
- [dR55] Georges de RHAM. *Variétés différentiables*. Hermann, 1955.
- [Mal72] Paul MALLIAVIN. *Géométrie différentielle intrinsèque*. N° 14 in Enseignement des sciences. Hermann, 1972.
- [Nar68] Raghavan NARASIMHAN. *Analysis on Real and Complex Manifolds*. N° 1 in Advanced studies in pure mathematics. Masson & Cie, 1968.

(Le 10 décembre 1999 à 15 : 09)

**Remerciements.** — Je remercie Christine Laurent de m'avoir proposé de donner ce cours. Une proportion substantielle du texte des parties 1 & 2 est dûe à Bernard Parisse, dont j'ai inclus & remanié les notes de cours de l'été dernier. Pour l'essentiel, ce texte a été inspiré par [Nar68].