Théorème de Hilbert-Samuel « arithmétique »

Ahmed ABBES* Thierry BOUCHE†

1.I.95

Résumé

On donne une nouvelle démonstration directe du théorème de Hilbert-Samuel « arithmétique » et on déduit un critère numérique pour l'existence de sections d'un fibré en droite sur une variété arithmétique de norme sup inférieure à un.

Abstract

We give a new direct proof of the "arithmetic" Hilbert-Samuel theorem from which we deduce a criterion for the existence of sections of an ample line bundle over an arithmetic variety with sup norm less than one.

1 Introduction

Soient K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers et Φ l'ensemble des plongements de K dans $\mathbb{C}$ modulo la conjugaison où $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes. Soit $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un schéma projectif, plat à fibre générique lisse de dimension $r \geq 1$. Soit L un faisceau inversible ample sur X, on munit L_σ pour toute place σ de Φ d'une métrique hermitienne à courbure positive $ic(L_\sigma)$. On considère alors sur X_σ la métrique $\omega_\sigma = ic(L_\sigma)/2\pi V$ où V est une constante choisie de telle sorte que le volume total de X_σ pour l'élément de volume associé dx soit 1. Le plongement

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n}) \to \oplus_\sigma H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes K_\sigma = W_n \tag{1}$$

fait de $H^0(X, L^{\otimes n})$ un réseau dans W_n qui est muni de deux normes :

1. Norme sup : Pour $x = (x_\sigma)_\sigma \in W_n$ on pose $\|x\|_{\sup} = \sup_\sigma(\|x_\sigma\|_{\sup})$ et pour $s \in H^0(X_\sigma, L_\sigma^{\otimes n})$ on définit $\|s\|_{\sup} = \sup_{p \in X_\sigma} |s(p)|$. On note B_n la boule unité de W_n pour cette norme.
2. Norme L^2 : Pour $x = (x_\sigma)_\sigma \in W_n$ on pose $\|x\|_{L^2} = \sup_\sigma(\|x_\sigma\|_{L^2})$ et pour $s \in H^0(X_\sigma, L_\sigma^{\otimes n})$ on définit $\|s\|_{L^2}^2 = \int_{X_\sigma} |s(x)|^2 dx$. On désigne par C_n la boule unité de W_n pour cette norme.

*Université Paris XI, Bat. 425 Département de Mathématiques 91405 Orsay cedex France

†Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques associé au CNRS, Université de Grenoble I B.P. 74 38402 St-Martin d'Héres cedex France

Classification A.M.S. : 14 G 40, 11 G 99, 32 L 10.

Mots clés : Variété arithmétique, intersection arithmétique, théorie d'Arakelov, théorème de Hilbert-Samuel, théorie spectrale des opérateurs elliptiques, fibré holomorphe hermitien.

Définition. — *On appelle sections d'Arakelov du fibré $L^{\otimes n}$ sur X et on note $H^0_{Ar}(X, L^{\otimes n})$ l'ensemble $H^0(X, L^{\otimes n}) \cap B_n$.*

On se propose de faire l'étude de cet ensemble quand $n \to +\infty$. On prouvera le théorème suivant :

Théorème principal (boule unité sup). — *Soient $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un schéma projectif plat à fibre générique lisse de dimension r et L un faisceau inversible ample muni en chaque place à l'infini d'une métrique hermitienne à courbure positive. On désigne par B_n la boule unité pour la norme sup de $H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, alors quand n tend vers l'infini la quantité :*

$$\frac{(r+1)!}{n^{r+1}}\big(- \log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(B_n))\big)$$

tend vers une limite finie appelée la self-intersection de L. On la note $(L)^{r+1}$.

Théorème principal (boule unité L^2). — *Avec les mêmes conditions et notations qu'au théorème précédent, on a la limite suivante quand n tend vers l'infini :*

$$\frac{(r+1)!}{n^{r+1}}\big(- \log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(C_n))\big) \to (L)^{r+1},$$

où C_n est la boule unité pour la norme L^2 de $H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

On déduit le critère suivant pour l'existence de sections de norme sup plus petite que 1 en chaque place.

Corollaire. — *si $(L)^{r+1} > 0$ alors $H^0_{Ar}(X, L^{\otimes n}) \neq 0$ pour n assez grand.*

Le théorème principal dans ses deux versions équivalentes (voir proposition 4.1) est l'analogue « arithmétique » du théorème de Hilbert-Samuel algébrique. Il a été démontré par Gillet et Soulé [G-S 4] en 1988 en utilisant les résultats partiels connus à l'époque sur le théorème de Riemann-Roch arithmétique ainsi que les travaux de Bismut et Vasserot [B-V]. De même qu'en géométrie algébrique, on peut déduire le théorème de Hilbert-Samuel « arithmétique » du théorème de Riemann-Roch arithmétique qui a été prouvé par Gillet et Soulé dans [G-S 1] (en utilisant les résultats d'analyse de Bismut et Lebeau [B-L]) et par Faltings dans [Fa 1]. Cette approche permet d'avoir en plus du terme dominant donné par le théorème principal (boule unité L^2), les deux termes suivants du développement de $-\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(C_n))$. L'objet de ce travail est d'en proposer une démonstration simple. L'intérêt de cette démarche, qui nous a été suggérée par L. Szpiro, peut s'expliquer par le fait que de nombreuses applications arithmétiques n'utilisent que le théorème de Hilbert-Samuel « arithmétique » . Pour donner quelques exemples nous invoquons le critère d'amplitude arithmétique de S. Zhang [Zh], le résultat sur les points entiers de hauteur bornée démontré par E. Ullmo [Ul], l'application à la conjecture de Bogomolov due à L. Szpiro [Sz 2] ainsi que des applications de Faltings [Fa 2] et de Vojta [Vo].

Si l'approche de Gillet et Soulé s'inspire du théorème de Riemann-Roch-Grothendieck et du théorème de l'indice pour la métrique de Quillen, la nôtre est très comparable à la preuve directe classique du théorème de Hilbert-Samuel algébrique. En effet, le théorème de Hilbert-Samuel algébrique se déduit immédiatement par récurrence de la suite exacte

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n}) \xrightarrow{\cdot s} H^0(X, L^{\otimes n+1}) \to H^0(Y, L^{\otimes n+1}|_Y) \to 0$$

où Y est le diviseur associé à la section s de L et n est grand ; ceci car la dimension est additive sur les suites exactes d'espaces vectoriels. La fonction χ que nous définissons ci-dessous tient lieu de caractéristique d'Euler dans le contexte arithmétique, elle est additive sur les suites exactes qui sont aussi exactes « au niveau des volumes » (voir la section 2 pour un énoncé plus précis), ce qui n'est évidement pas le cas de la suite exacte que nous considérons (que ce soit dans le cas des volumes L^2 ou sup). L'essentiel est par conséquent de mesurer le défaut d'exactitude des volumes de cette suite exacte. Il ressort de notre analyse que la seule contribution au terme dominant (en n^{r+1}) provient du déterminant de la première flèche (multiplication par s). Nous estimons ce terme à l'aide d'un rafinement de travaux antérieurs de Demailly [De] et Bouche [B1]. Remarquons à ce propos que, si l'aspect analytique de notre travail est allégé par le fait que nous n'avons pas à nous préoccuper de la métrique de Quillen, le point de départ de nos estimations à l'infini et de l'article [B-V] de Bismut-Vasserot est identique : c'est la description asymptotique du spectre du laplacien antiholomorphe agissant sur les sections de $L^{\otimes n}$ dû à J.-P. Demailly [De].

Signalons que Lau, Rumely et Varley prouvent dans un cadre adélique et par une méthode différente, l'existence d'un terme dominant analogue à celui donné par le théorème principal sous des conditions plus faibles que les nôtres [L-R-V] et [L-R].

Dans cet article, la section 2 introduit des éléments de volume additifs qui serviront dans la récurrence nécessaire pour la preuve du théorème principal. Cette récurrence sera possible grâce à l'estimation à l'infini développée dans la section 3. La démonstration du théorème principal ainsi que le critère d'existence de sections de norme sup < 1 (corollaire précédent) sont donnés dans la section 4. Finalement, nous montrons que la self-intersection définie par le théorème principal coïncide dans le cas général avec celle obtenue à partir des théories d'intersection d'Elkik dans [El 2] et de Gillet et Soulé dans [G-S 2] et [G-S 3] et dans le cas d'une surface arithmétique avec la self-intersection d'Arakelov (section 5).

Nous remercions R. Elkik et G. Lebeau pour leurs lectures attentives du manuscrit. A. Abbes remercie tout particulièrement L. Szpiro pour avoir dirigé ce travail et pour ses efforts dans l'élaboration finale du manuscrit.

2 Volumes additifs

Dans une première étape, nous introduirons des éléments de volume réels additifs que nous comparerons aux éléments de volume L^2 et sup. Dans tout ce qui suit, on désigne par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs. Soit M un $\mathcal{O}_K-$module de type fini. On fixe pour toute place $\sigma \in \Phi$ un élément de volume réel $\eta_\sigma \in \det_{\mathbb{R}}(M \otimes K_\sigma)$. L'espace vectoriel $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est donc muni de l'élément de volume réel $\eta = \otimes_\sigma \eta_\sigma$. On pose $\overline{M} = M/M_{tor}$ où M_{tor} est le sous-module de torsion de M. L'inclusion canonique $\overline{M} \hookrightarrow M_{\mathbb{R}}$ fait de $\overline{M}$ un réseau de $M_{\mathbb{R}}$. On définit :

$$\chi(M, \eta) = -\log(\mathrm{vol}(M_{\mathbb{R}}/\overline{M})) + \log(\# M_{tor}). \tag{2}$$

La fonction χ est additive au sens suivant (voir [M-B] et [Sz 1]) : soient M_1, M_2 et M_3 trois $\mathcal{O}_K$-modules de type fini, et $\eta_1 \in \det_{\mathbb{R}}(M_{1,\mathbb{R}})$, $\eta_2 \in \det_{\mathbb{R}}(M_{2,\mathbb{R}})$

et $\eta_3 \in \det_{\mathbb{R}}(M_{3,\mathbb{R}})$ trois éléments de volumes réels. On dit que la suite $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ est exacte si elle l'est sur $\mathcal{O}_K$ et si $\eta_2 = \eta_1 \otimes \eta_3$ dans l'isomorphisme induit sur les déterminants. On a alors

$$\chi(M_2, \eta_2) = \chi(M_1, \eta_1) + \chi(M_3, \eta_3) \ . \tag{3}$$

Soient A une $\mathcal{O}_K-$algèbre graduée de type fini $A = \oplus_{n \geq 0} A_n$, M un $A-$module gradué de type fini $M = \oplus_{n \geq 0} M_n$ (tel que M_n n'est pas de torsion pour tout n) et P le polynôme de Hilbert-Samuel de $M \otimes_{\mathcal{O}_K} K$.

Définition 2.1 *Soit k un nombre réel. On définit $\alpha_{n,k} \in \det_{\mathbb{R}}(M_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$ par l'équation :*

$$\chi(M_n, \alpha_{n,k}) = k \sum_{j=0}^{n-1} P(j) + \chi(\mathcal{O}_K) P(n) \tag{4}$$

où $\chi(\mathcal{O}_K)$ est calculée avec les éléments de volume canoniques de $\mathcal{O}_K$.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Soient k un nombre réel, M^1 , M^2 et M^3 trois A-modules graduées de type fini qui forment une suite exacte :*

$$0 \to M^1 \to M^2 \to M^3 \to 0.$$

Soit

$$\Phi_n : \det(M_n^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \det(M_n^1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \otimes \det(M_n^3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$$

les isomorphismes qui s'en déduisent. Alors si $\alpha_{n,k}^j \in \det(M_n^j \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$ pour $j = 1,\ 2$ ou 3 et $n \in \mathbb{N}$ sont les éléments de volumes de 2.1, on a :

$$\Phi_n(\alpha_{n,k}^2) = \alpha_{n,k}^1 \otimes \alpha_{n,k}^3 \ .$$

Preuve. — Soient P_1 , P_2 et P_3 les polynômes de Hilbert-Samuel de M_K^1 , M_K^2 et M_K^3. On pose $\delta_{n,k} = \Phi_n^{-1}(\alpha_{n,k}^1 \otimes \alpha_{n,k}^3)$.

Par additivité de χ on a l'égalité :

$$\begin{aligned}
\chi(M_n^2, \delta_{n,k}) &= \chi(M_n^1, \alpha_{n,k}^1) + \chi(M_n^3, \alpha_{n,k}^3) && (5)\\
&= k \sum_{j=0}^{n-1} P_1(j) + \chi(\mathcal{O}_K) P_1(n) + \\
&\quad + k \sum_{j=0}^{n-1} P_3(j) + \chi(\mathcal{O}_K) P_3(n) && (6)\\
&= k \sum_{j=0}^{n-1} P_2(j) + \chi(\mathcal{O}_K) P_2(n). && (7)
\end{aligned}$$

Pour établir (7) on a utilisé l'égalité $P_2(n) = P_1(n) + P_3(n)$. On obtient alors par 2.1 l'identité $\delta_{n,k} = \alpha_{n,k}^2$.

3 Estimation à l'infini

Afin de comparer les éléments de volume définis dans la section précédente au volume L^2, une estimation à l'infini est nécessaire.

Soient X une variété complexe projective lisse de dimension $r \geq 1$ et L un faisceau inversible très ample hermitien à courbure positive $ic(L)$. On considère sur X la métrique $\omega = ic(L)/2\pi V$ où V est la constante choisie de telle sorte que le volume total de X pour l'élément de volume associé dx soit 1. Soit s une section non nulle de $H^0(X, L)$ telle que $Y = \mathrm{div}(s)$ soit lisse dans le cas $r \geq 2$ et réduit dans le cas $r = 1$. Pour n assez grand, on a la suite exacte suivante :

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n}) \xrightarrow{s} H^0(X, L^{\otimes n+1}) \to H^0(Y, L^{\otimes n+1} |_Y) \to 0. \tag{8}$$

On cherche à estimer le volume L^2 induit sur $H^0(X, L^{\otimes n+1})$ par la suite exacte (8), on définit pour cela la fonction $g(n)$ par :

$$V^{n+1}_{X,L^2} = g(n+1) \ V^n_{X,L^2} \otimes V^{n+1}_{Y,L^2} \tag{9}$$

où V^n_{X,L^2} et V^n_{Y,L^2} sont les volumes L^2 de $H^0(X, L^{\otimes n})$ et $H^0(Y, L^{\otimes n} |_Y)$ (c'est-à-dire les éléments de volume qui donnent aux boules unités L^2 le volume 1). On prouvera le résultat asymptotique suivant :

Proposition 3.1

$$\frac{1}{P(n)} \ \log g(n+1) \to -\int_X \log |s(x)|^2 \ dx, \textit{ quand } n \to +\infty$$

où P désigne le polynôme de Hilbert-Samuel de L sur X.

Nous ferons usage de la proposition suivante démontrée indépendament par Bouche [B 1] et Tian [T].

Proposition 3.2 *Soit $s_1, \ldots, s_N$ avec $N = P(n)$ une base orthonormée pour le produit L^2 de $H^0(X, L^{\otimes n})$. Alors, la fonction*

$$b_n(x) = \sum_{j=1}^{N} |s_j(x)|^2$$

est indépendante de la base fixée et on a l'équivalent suivant :

$$b_n(x) \sim P(n), \ \textit{quand } n \to +\infty$$

et ceci uniformément en $x \in X$.

Il s'ensuit :

Corollaire 3.3 *Il existe une constante c non nulle telle que pour tout $n \geq 1$ et pour toute section $s \in H^0(X, L^{\otimes n})$, on ait :*

$$\|s\|_{L^2} \leq \|s\|_{\sup} \leq cP(n)^{\frac{1}{2}} \ \|s\|_{L^2}.$$

Preuve. — Soient $s \in H^0(X, L^{\otimes n})$ une section non nulle et $x \in X$ tels que $\|s\|_{\text{sup}} = |s(x)|$. Et soit $s_1, \ldots, s_N$ avec $N = P(n)$ une base orthonormée pour le produit L^2 telle que $s_j(x) = 0$ pour tout $j \geq 2$. On peut alors écrire :

$$s = \sum_{j=1}^{N} a_j s_j$$

d'où on tire :

$$\begin{array}{rcl} s(x) & = & a_1 \; s_1(x) \\ \|s\|_{L^2}^2 & = & \sum a_j^2 \\ \|s\|_{\text{sup}}^2 & = & a_1^2 \; |s_1(x)|^2 = a_1^2 \; b_n(x) \end{array}$$

ce qui donne :

$$\|s\|_{\text{sup}}^2 \leq \|s\|_{L^2}^2 \; b_n(x) \leq c^2 \; P(n) \|s\|_{L^2}^2$$

pour c une constante vérifiant : $b_n(x)/P(n) \; \leq c^2$ pour tout n et pour tout x.

La seconde flèche de (8) définit sur $H^0(Y, L^{\otimes n+1} \mid_Y)$ un élément de volume réel V_{q,L^2}^{n+1} induit par le produit quotient L^2 donné par cette surjection. On compare ce volume quotient au volume L^2 par la fonction positive $\gamma(n)$ qui vérifie l'équation $V_{Y,L^2}^n = \gamma(n) V_{q,L^2}^n$. La multiplication par s induit sur $H^0(X, L^{\otimes n})$ un produit noté $\langle \; , \rangle_{s,L^2}$: $\langle v, v' \rangle_{s,L^2} = (sv, sv')_{L^2}$. On désigne par V_{s,L^2}^n l'élément de volume réel de $H^0(X, L^{\otimes n})$ qui donne à la boule unité de ce produit le volume 1 et on le compare au volume L^2 par la fonction positive $\delta(n)$ vérifiant l'équation : $V_{X,L^2}^n = \delta(n) V_{s,L^2}^n$. Pour finir, on définit la fonction positive $\varphi(n)$ par l'égalité :

$$V_{X,L^2}^{n+1} = \varphi(n+1) \; V_{s,L^2}^n \otimes V_{q,L^2}^{n+1}.$$

On a alors :

$$g(n+1) = \frac{\varphi(n+1)}{\delta(n)\gamma(n+1)}. \tag{10}$$

Pour prouver 3.1, on montrera que :

i. $\log \varphi(n) = o(n^r)$;

ii. $\log \gamma(n) = o(n^r)$;

iii. $\log \delta(n) = P(n) \int_X \log |s(x)|^2 \; dx + o(n^r)$.

Lemme 3.4 $\log \varphi(n) = o(n^r)$.

Preuve. — On considère une suite exacte de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels : $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$. On se donne un produit hermitien sur V et on considère sur V' le produit induit et sur V'' le produit quotient. Soient p et q les dimensions respectives de V' et V'' sur $\mathbb{C}$. On fixe une base orthonormée de V sur $\mathbb{C}$, $X_1, \ldots, X_{p+q}$ telle que $X_1, \ldots, X_p$ soit une base orthonormée de V' et $\overline{X}_{p+1}, \ldots, \overline{X}_{p+q}$ soit une base orthonormée de V''. Soient η, η' et η'' les éléments de volumes respectifs de V, V' et V'' qui donnent aux boules unités des espaces respectifs le volume 1. Alors, on a :

$$\eta = \frac{1}{a(p+q)} X_1 \wedge \ldots \wedge X_{p+q} \wedge iX_1 \ldots \wedge iX_{p+q}$$

où $a(p+q)$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^{2(p+q)}$ pour le produit scalaire ordinaire. D'où :

$$\eta = \frac{a(p)\ a(q)}{a(p+q)}\ \eta' \otimes \eta''. \tag{11}$$

Alors, si P et Q sont les polynômes de Hilbert-Samuel respectifs de L sur X et $L|_Y$ sur Y, il vient :

$$\varphi(n+1) = \frac{a(P(n))\ a(Q(n+1))}{a(P(n+1))} \tag{12}$$

ce qui donne :

$$\log \varphi(n) = o(n^r). \tag{13}$$

Proposition 3.5 *Avec les notations précédentes, il existe un entier* n_0 *et une constante* B *tel que pour tout* $n \geq n_0$ *et pour tout* t *dans* $H^0(Y, L^{\otimes n+1}|_Y)$ *:*

$$\|t\|_{q,L^2} \leq B\|t\|_{L^2}.$$

D'où le corollaire suivant :

Corollaire 3.6 $\log \gamma(n) = o(n^r)$.

Preuve. — Par 3.5 et 3.3 on a :

$$\|\ \|_{q,L^2} \leq B\|\ \|_{L^2}$$

$$\|\ \|_{L^2} \leq \|\ \|_{\sup} \leq \|\ \|_{q,\sup} \leq cP(n)^{\frac{1}{2}}\ \|\ \|_{q,L^2}.$$

Il vient alors :

$$\frac{1}{cP(n)^{\frac{1}{2}}}\ \|\ \|_{L^2} \leq \|\ \|_{q,L^2} \leq\ B\|\ \|_{L^2}.$$

Et comme $\dim H^0(Y, L^{\otimes n+1}|_Y)$ est un polynôme en n de degré $r-1$, on obtient : $\log \gamma(n) = o(n^r)$.

Preuve de 3.5. — Cet énoncé est une conséquence directe des théorèmes d'extension L^2 d'Ohsawa [Oh] et Manivel [Ma]. Nous indiquons brièvement comment le déduire des énoncés de [Ma]. Dans notre situation, Y est le diviseur lisse de X défini par la section s de L ; celle-ci est donc partout transverse à la section nulle et on applique le corollaire 1 de [Ma] dans la situation où le fibré vectoriel E est L. On a évidemment $\mathbb{P}(E) = X$ car E est de rang 1, et $\mathcal{O}_{E^*}(1) = L$. On choisit maintenant n_0 suffisamment grand pour que $L^{n_0} \otimes K_X^*$ soit ample, et l'on obtient que le morphisme de restriction $H^0(X, L^{\otimes n}) \to H^0(Y, L^{\otimes n})$ est surjectif pour tout $n \geq n_0$ avec les estimations L^2 du théorème 1 de [Ma]. C'est-à-dire, en faisant usage de la remarque 2 : *Il existe une constante M ne dépendant que de Y telle que toute section t de $H^0(Y, L^{\otimes n})$ se relève en une section T de $H^0(X, L^{\otimes n})$ vérifiant*

$$\int_X \frac{|T|^2 dx}{(1+|s|^2)^2} \leq M \|t\|^2_{L^2}.$$

La proposition 3.5 s'en déduit immédiatement en observant que le terme de gauche est minoré par $(1+\|s\|^2_{\text{sup}})^{-2}\|T\|^2_{L^2}$ et que l'on a évidemment $\|t\|_{q,L^2} \leq \|T\|_{L^2}$. Dans le cas où $r = 1$ (Y discret), ce résultat a été obtenu par Ullmo [Ul] et Zhang [Zh] en utilisant les estimations L^2 de Hörmander-Bombieri-Skoda [Sk]. Dans ce cas on peut montrer que la constante B tend vers 0 ; en utilisant la proposition 3.2 il est en fait facile de voir que la meilleure constante B est équivalente à $1/\sqrt{n}$. Il semble probable que ce soit également le cas en dimension plus grande.

Il reste donc pour achever la preuve de 3.1 à démontrer (iii). Soit l'inclusion :

$$H^0(X, L^{\otimes n}) \stackrel{\cdot s}{\hookrightarrow} H^0(X, L^{\otimes n+1}).$$

Il existe une base orthonormée de $H^0(X, L^{\otimes n})$ pour le produit L^2 (,) qui est orthogonale pour le produit induit $\langle\ ,\ \rangle_{s,L^2}$. On la note $X_1, \ldots, X_N$ avec $N = P(n)$. Dans cette base, la matrice de $\langle\ ,\ \rangle_{s,L^2}$ s'écrit $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ avec $\lambda_j > 0$. On peut exprimer :

$$\begin{aligned} V^n_{X,L^2} &= a(P(n))\ X_1 \wedge \ldots \wedge X_N \wedge iX_1 \wedge \ldots \wedge iX_N \\ V^n_{s,L^2} &= a(P(n))\ \frac{X_1}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}} \wedge \ldots \wedge \frac{X_N}{\lambda_N^{\frac{1}{2}}} \wedge i\frac{X_1}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}} \wedge \ldots \wedge i\frac{X_N}{\lambda_N^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$V^n_{s,L^2} = \frac{1}{\prod_{j=1}^N \lambda_j}\ V^n_{X,L_2}.$$

On note $m_s :\ H^0(X, L^{\otimes n}) \stackrel{\cdot s}{\to} H^0(X, L^{\otimes n+1})$ et m_s^* son dual quand on munit les espaces de leurs produits L^2. D'où, si $\phi_{n,s}$ désigne $m_s^* \circ m_s$, on a $\prod_{j=1}^N \lambda_j = \det \phi_{n,s}$ et, par suite :

$$\delta(n) = \det \phi_{n,s}.$$

Théorème 3.7 *On a la limite suivante :*

$$\frac{1}{P(n)}\ \log\det\phi_{n,s} \to \int_X \log|s|^2\ dx\ , \qquad n \to +\infty. \tag{14}$$

Preuve. — On a par définition $\lambda_j = \|s \otimes X_j\|^2_{L^2} = \int_X |s|^2 |X_j|^2 dx$. Observons avant tout que la quantité $\frac{1}{P(n)} \log\det\phi_{n,s}$ n'est autre que le logarithme de la moyenne géométrique des valeurs propres λ_j. Par conséquent, si on modifie s en la multipliant par une constante c, cette quantité est translatée de $2\log c$, ainsi que l'intégrale de $\log\|s\|^2$ car le volume total de dx est 1. On supposera donc désormais que $\|s\|_{\sup} < 1$, ce qui implique que toutes les valeurs propres λ_j sont inférieures à 1. Nous décomposons le théorème 3.7 en deux inégalités :

Lemme 3.8 *On a*

$$\liminf P(n)^{-1} \log \det \phi_{n,s} \geq \int_X \log |s|^2 dx.$$

Preuve. — La base (X_j) étant orthonormée pour le produit scalaire L^2, l'élément de volume $|X_j|^2 dx$ est de volume total 1 sur X. On a par conséquent pour chaque $j = 1, \dots, N$

$$\log \int_X |s|^2 |X_j|^2 dx \geq \int_X (\log |s|^2) |X_j|^2 dx.$$

En sommant ces inégalités sur j et en utilisant le fait que l'on peut calculer la fonction b_n définie par la proposition 3.2 dans une base orthonormée quelconque (ici (X_j)), on obtient :

$$\frac{1}{P(n)} \sum_{j=1}^{N} \log \lambda_j \geq \int_X \log |s|^2 (\frac{1}{P(n)} b_n) dx. \tag{15}$$

La proposition 3.2 nous assure que la fonction $b_n / P(n)$ converge uniformément sur X vers la constante 1, le lemme 3.8 se déduit donc immédiatement de (15).

Lemme 3.9 *On a*

$$\limsup P(n)^{-1} \log \det \phi_{n,s} \leq \int_X \log |s|^2 dx.$$

Preuve. — La stratégie de la démonstration est la suivante : comme les valeurs propres de $\phi_{n,s}$ sont toutes inférieures à 1, il suffit pour majorer son déterminant $\delta(n)$ de le contrôler sur un sous-espace vectoriel de $H^0(X, L^{\otimes n})$. Idéalement, on cherche un sous-espace (de dimension équivalente à $P(n)$) contenant une base orthonormée de vecteurs propres X_j prenant leur masse sur de petits ouverts disjoints, de telle sorte que l'inégalité de concavité (15) puisse être ramenée au cas d'égalité ($|s|$ constante). Cela n'est malheureusement pas possible dans la catégorie holomorphe, et c'est pourquoi nous allons devoir étendre notre analyse aux espaces propres du laplacien antiholomorphe de $L^{\otimes n}$ correspondant aux petites valeurs propres. Nous introduisons quelques notations (*cf.* [B 2]). Dans ces notations, le sous-espace de $H^0(X, L^{\otimes n})$ sur lequel le déterminant de $\phi_{n,s}$ est facile à majorer est l'espace $\Psi_n(\mathcal{F}_n(\mu))$ construit ci-dessous, et c'est la majoration (21) qui confirme notre approche. On note $\Delta''_n = (D'' + \delta'')^2$ le laplacien antiholomorphe associé à la connexion D'' et à la métrique du fibré $L^{\otimes n}$ induite par celle de L, que nous considérerons comme un opérateur non borné à domaine dense de l'espace des sections de carré intégrable de $L^{\otimes n}$ sur X (noté $L^2(X, L^{\otimes n})$). Pour un ouvert Ω de X on définit également l'opérateur $\Delta''_{n,\Omega}$ qui est le même opérateur différentiel, avec conditions de Dirichlet au bord de Ω. Si on se donne un réel $\mu > 0$, on note $\mathcal{H}_n(\Omega, \mu)$ la somme directe des espaces propres de $\frac{1}{n}\Delta''_{n,\Omega}$ associés aux valeurs propres inférieures ou égales à μ. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace $L^2(\Omega, L^{\otimes n})$.

Soit maintenant $(\Omega_k)_{k=1,\dots,M}$ une famille d'ouverts de X deux à deux disjoints. On pose $\mathcal{F}_n(\mu) = \bigoplus_k \mathcal{H}_n(\Omega_k, \mu)$, et on note

$$\begin{pmatrix} \Psi_n & : & \mathcal{F}_n(\mu) & \longrightarrow & H^0(X, L^{\otimes n}) \\ & & (u_k)_k & \mapsto & P_0(u_1 + \cdots + u_M) \end{pmatrix}$$

où P_0 est le projecteur de Bergman (*i.e.* projecteur orthogonal de $L^2(X, L^{\otimes n})$ sur $H^0(X, L^{\otimes n})$). Dans la suite, , on identifiera la famille (u_k) et son image u par l'injection canonique de $\mathcal{F}_n(\mu)$ dans $L^2(X, L^{\otimes n})$. Le lemme suivant généralise le lemme 3.3 de [B 2] :

Lemme 3.10 *Si $\mu < \pi V$ et n est suffisamment grand, Ψ_n est injective. En outre, on a*

$$\|\Psi_n(u) - u\|_{L^2}^2 \le (\pi V)^{-1} \mu \|u\|_{L^2}^2 \quad \text{si} \quad u \in \mathcal{F}_n(\mu).$$

Preuve. — Notons $H(u) = \int_X < \frac{1}{n} \Delta''_n u, u > dx = \frac{1}{n} \int_X |D'' u|^2 dx$ (*resp.* $H_\Omega(v) = \int_\Omega < \frac{1}{n} \Delta''_n v, v > dx$) si $u \in \mathrm{Dom}\, \Delta''_n$ (*resp.* $v \in \mathrm{Dom} \Delta''_{n,\Omega}$). On a alors, si $u = (u_k)_k \in \mathcal{F}_n(\mu)$,

$$H(u) = \sum_{k=1}^{M} H_{\Omega_k}(u_k) \le \mu \sum_k \int_{\Omega_k} |u_k|^2 dx = \mu \|u\|_{L^2}^2. \tag{16}$$

Par le lemme 3.2 de [B 2] on sait que la limite inférieure de la première valeur propre non nulle μ_1^n de $\frac{1}{n} \Delta''_n$ sur X est supérieure au minimum sur X des valeurs propres de la courbure $ic(L)$ par rapport à la métrique ω, donc à $2\pi V$ puisque dans notre situation, toutes les valeurs propres de $ic(L)$ sont égales à cette constante. Pour n suffisamment grand, on a donc $\mu_1^n \ge \pi V > \mu$. Pour un tel n, prenons un élément u dans le noyau de Ψ_n. u est dans l'orthogonal de l'espace des sections holomorphes qui est égal au noyau de Δ''_n, ce qui implique : $H(u) \ge \mu_1^n \|u\|_{L^2}^2$ d'une part. D'autre part, d'après (16), on a $H(u) \le \mu \|u\|_{L^2}^2$. Ces deux inégalités impliquent bien que u est nulle. Posons maintenant $\tilde{u} = u - \Psi_n(u)$. C'est la projection orthogonale de u sur l'orthogonal de $H^0(X, L^{\otimes n})$, donc $H(\tilde{u}) \ge \mu_1^n \|\tilde{u}\|_{L^2}^2$ et $H(u) = H(\tilde{u}) \le \mu \|u\|_{L^2}^2$ d'après (16). De ces deux inégalités on déduit $\|\tilde{u}\|_{L^2}^2 \le (\mu / \mu_1^n) \|u\|_{L^2}^2$, ce qui achève la preuve du lemme.

Le lemme 3.10 signifie que l'application Ψ_n injecte l'espace $\mathcal{F}_n(\mu)$ de façon quasi-isométrique dans $H^0(X, L^{\otimes n})$. Le lemme 3.11 ci-dessous signifie que l'application Ψ_n est également proche d'une isométrie pour la forme quadratique q_n définie sur $L^2(X, L^{\otimes n})$ par : $q_n(u) = \int_X |s|^2 |u|^2 dx$. Notons que, si u est holomorphe, on a évidemment $q_n(u) = < u, \phi_{n,s}(u) >_{L^2}$.

Lemme 3.11 *Si $\mu < \pi V$ et $u \in \mathcal{F}_n(\mu)$, on a*

$$|q_n(u) - q_n(\Psi_n(u))| \le 3(\pi V)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\mu}\, \|u\|_{L^2}^2.$$

Preuve. — On a ponctuellement $|u(x)|^2 - |\Psi_n(u)(x)|^2 = |u(x) - \Psi_n(u)(x)|^2 + 2\mathrm{Re} < \Psi_n(u)(x), (u - \Psi_n(u))(x) >$ d'où (en tenant compte du fait que $\|s\|_{\sup} <$

1) :

$$
\begin{aligned}
&|\int_X |s|^2(|u|^2 - |\Psi_n(u)|^2)dx| \\
&\qquad \leq \int_X ||u(x)|^2 - |\Psi_n(u)(x)|^2|dx \\
&\qquad \leq \|u - \Psi_n(u)\|_{L^2}^2 + 2\int_X |\Psi_n(u)|\,||u| - |\Psi_n(u)||dx \\
&\qquad \leq \|u - \Psi_n(u)\|_{L^2}^2 + 2\|\Psi_n(u)\|_{L^2}\|u - \Psi_n(u)\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

d'où le lemme 3.11 d'après l'estimation du lemme 3.10 en tenant compte de la majoration de μ.

Nous en venons à la preuve de 3.9, qui repose sur une succession de majorations utilisant les lemmes précédents. Tous les déterminants de formes quadratiques qui apparaîtront sont pris par rapport au produit L^2 sur le même espace. La première majoration exprime comme nous l'avons annoncé que toutes les valeurs propres de $\phi_{n,s}$ sont inférieures à 1, et que $\mathrm{Im}\Psi_n \subset H^0(X, L^{\otimes n})$:

$$\det \phi_{n,s} = \det[q_{n|H^0(X,L^{\otimes n})}] \leq \det[q_{n|\mathrm{Im}\Psi_n}]. \tag{17}$$

Pour majorer le déterminant de q_n sur $\mathrm{Im}\Psi_n$, nous nous ramenons sur $\mathcal{F}_n(\mu)$ en appliquant Ψ_n^*. Le lemme 3.10 nous permet de contrôler la distortion entre le produit scalaire L^2 de $\mathcal{F}_n(\mu)$ et celui transposé par Ψ_n :

$$\det[q_{n|\mathrm{Im}\Psi_n}] \leq \left(\frac{1}{1 - \sqrt{\mu/\pi V}}\right)^{2\dim \mathcal{F}_n(\mu)} \det[q_n \circ \Psi_{n|\mathcal{F}_n(\mu)}]. \tag{18}$$

Un théorème élémentaire d'algèbre linéaire affirme que le déterminant d'une matrice hermitienne positive est majoré par le produit de ses termes diagonaux. Pour un n donné on choisit une base orthonormée $(h_l^k)_{l,k}$ de $\mathcal{F}_n(\mu)$ composée pour chaque k d'une base L^2-orthonormée de $\mathcal{H}_n(\Omega_k, \mu)$, et on obtient

$$
\begin{aligned}
\log\det[q_n \circ \Psi_{n|\mathcal{F}_n(\mu)}] &\leq \sum_{k,l} \log q_n \circ \Psi_n(h_l^k) &(19)\\
&= \sum_{k,l} \log(q_n(h_l^k) + 3\sqrt{\mu/\pi V}) &(20)\\
&\leq \sum_k \log(\sup_{\Omega_k} |s|^2 + 3\sqrt{\mu/\pi V}) \dim \mathcal{H}_n(\Omega_k, \mu). &(21)
\end{aligned}
$$

Pour passer de (19) à (20), nous avons utilisé 3.11. Notons que la même majoration appliquée à une base orthonormée de $H^0(X, L^{\otimes n})$ aurait conduit à l'inégalité $\det \phi_{n,s} \leq \sup_X \log |s|^2 P(n)$ qui converge simplement vers l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique des valeurs propres de $\phi_{n,s}$.

Déduire 3.9 de (21) est aisé. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\|s\|_{\sup} + 3\varepsilon < 1$. La fonction $\log(|s|^2 + 3\varepsilon)$ étant uniformément continue sur X, son intégrale est approchée à ε près par toute somme de Riemann associée à un pavage de X de maille $\eta > 0$ donnée. On réalise un tel pavage en recouvrant X par des ouverts Ω_k deux à deux disjoints, dont l'union des adhérences vaut X (pratiquement, on prendra pour Ω_k des cubes de côté $< \eta/2r$ dans des ouverts de carte). Le pavage Ω_k est désormais fixé.

On fixe $\mu = \pi V \varepsilon^2$. Le Corollaire 2.4 de Demailly [De] s'écrit dans notre situation (cf. également le théorème 3.14 et la définition (1.5) de [De]) :

$$\dim \mathcal{H}_n(\Omega_k, \mu) \sim P(n) \operatorname{Vol}(\Omega_k)$$

lorsque $n \to +\infty$. En effet, la fonction ν_B considérée dans notre situation est $\nu_L(2(\pi r V + \mu)) = V^r \sum_{p\in\mathbb{N}^r} [2\mu + 2\pi V r - \sum_{j=1}^r (2p_j+1)2\pi V]_+^0$ où le symbole $[x]_+^0$ prend par convention la valeur 1 si $x > 0$, et 0 sinon. Cette fonction vaut donc V^r pour $0 < \mu < \pi V$, et l'on a bien sûr $P(n) = V^r n^r + o(n^r)$. Notons que cet équivalent peut également se déduire de la limite (1b) du théorème 1.1 de [B 2]. Il vient pour $n \geq n_0$:

$$\dim \mathcal{H}_n(\Omega_k, \mu) \geq \operatorname{Vol}(\Omega_k) P(n)(1-\varepsilon). \tag{22}$$

De (21) et (22) on tire (en tenant compte du fait que $\log(|s|^2 + 3\varepsilon) \leq 0$ sur X)

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(n)} \log\det[q_n \circ \Psi_{n|\mathcal{F}_n(\mu)}] &\leq (1-\varepsilon) \sum_k \sup_{\Omega_k} \log(|s|^2 + 3\varepsilon) \operatorname{Vol}(\Omega_k) \\ &\leq (1-\varepsilon)\big(\int_X \log(|s|^2 + 3\varepsilon) dx + \varepsilon \big) \end{aligned} \tag{23}$$

pour $n \geq n_0$. En utilisant (17) et (18) on trouve

$$\limsup_n \frac{1}{P(n)} \log\det \phi_{n,s} \leq (1-\varepsilon)\big(\int_X \log(|s|^2 + 3\varepsilon) dx + \varepsilon \big) - 2\log(1-\varepsilon) \tag{24}$$

Le lemme 3.9, et par conséquent le théorème 3.7, est démontré. Ceci termine la preuve de (iii) donc de 3.1.

Ce résultat étend à la fonction log un théorème de Boutet de Monvel et Guillemin (théorème 3.13 de [B-G]) démontré par une méthode entièrement différente pour les fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3.12. — On aura besoin dans la partie 4 de la généralisation suivante de la proposition 3.1 : L étant supposé ample, on considére j un entier tel que $L^{\otimes j}$ soit très ample et on fixe une section s de $H^0(X, L^{\otimes j})$ tel que $\operatorname{div}(s) = Y$ soit lisse dans le cas $r \geq 2$ et réduit dans le cas $r = 1$. Pour tout entier p compris entre 0 et $j-1$ et pour n assez grand on a la suite exacte suivante :

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes nj+p}) \xrightarrow{s} H^0(X, L^{\otimes (n+1)j+p}) \to H^0(Y, L^{\otimes (n+1)j+p}|_Y) \to 0.$$

On définit pour généraliser 3.1 les fonctions $g_p(n)$ par :

$$V_{X,L^2}^{(n+1)j+p} = g_p(n+1) V_{X,L^2}^{nj+p} \otimes V_{Y,L^2}^{(n+1)j+p}.$$

De façon analogue à 3.1 on prouve que pour tout entier p verifiant $0 \leq p \leq j-1$

$$\frac{1}{P(nj)} \log g_p(n) \to -\int_X \log |\, s\,|^2 \, dx \qquad n \to +\infty.$$

4 Théorème de Hilbert-Samuel « arithmétique »

On reprend les notations de l'introduction où $X \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ est un schéma projectif plat à fibre générique lisse de dimension r et L un faisceau inversible ample sur X muni en chaque place à l'infini d'une métrique hermitienne à courbure positive $ic(L_\sigma)$. On pose $A = \oplus_{n\geq 0} H^0(X, L^{\otimes n})$ algèbre graduée de type fini sur $\mathcal{O}_K$ et on considère le plongement canonique :

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n}) \to \oplus_\sigma H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes K_\sigma = W_n. \tag{25}$$

L'espace W_n est muni de l'élément de volume sup $V^n_{X,\mathrm{sup}}$ qui donne à la boule unité sup le volume 1, de l'élément de volume L^2 noté V^n_{X,L^2} et de l'élément de volume $V^n_{X,k}$ $(k \in \mathbb{R})$ défini dans 2.1 pour la $\mathcal{O}_K-$algèbre A. On compare ces éléments de volumes par les fonctions positives $f_X(n,k)$ et $h_X(n)$ définies par les équations :

$$\begin{array}{rcl} V^n_{X,k} & = & f_X(n,k) V^n_{X,L^2} \\ V^n_{X,L^2} & = & h_X(n) V^n_{X,\mathrm{sup}}. \end{array}$$

Proposition 4.1

$$\log(h_X(n)) = o(n^{r+1}). \tag{26}$$

Preuve. — Comme la dimension de $H^0(X_K, L_K^{\otimes n})$ est polynômiale en n de degré r, le corollaire 3.3 implique la proposition.

Proposition 4.2 *Il existe un unique nombre réel k tel que :*

$$\log(f_X(n,k)) = o(n^{r+1}). \tag{27}$$

Remarque. — On prouvera dans la suite qu'il existe une fonction réelle $\eta(k)$ tel que

$$\log(f_X(n,k)) = \eta(k) n^{r+1} + o(n^{r+1}.$$

La fonction η est affine. En effet par 2.1 on a

$$\log(f_X(n,k)) - \log(f_X(n,k')) = c(k-k')n^{r+1} + o(n^{r+1}).$$

Dans l'équation ci-dessus c désigne le coefficient dominant de $\sum_{j=0}^{n-1} P(j)$ et P le polynôme de Hilbert-Samuel algébrique de $A \otimes_{\mathcal{O}_K} K$, donc

$$c = \frac{(L_K)^r}{(r+1)!}.$$

Ceci prouve l'unicité de k.

Preuve. — Comme on l'a indiqué dans la remarque, on va prouver que pour tout nombre réel k il existe un nombre réel $\eta(k)$ tel que $\log f_X(n,k) = \eta(k) n^{r+1} + o(n^{r+1})$.

A) Cas très ample :

On fera une démonstration par récurrence sur $r = \mathrm{dim} X_K$. L étant très ample, il existe alors un plongement $\phi : X \to \mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$ tel que $\phi^*(\mathcal{O}(1)) = L$. Par le théorème de Bertini et après une extension de K il existe une section l non nulle de $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$ qui coupe X_K en une sous variété de dimension $r-1$ lisse dans le cas $r \geq 2$ et réduite dans le cas $r=1$. Soit $s = \phi^*(l)$. Le faisceau $L^{\otimes -1}$ faisceau d'idéaux de $\mathrm{div}(s)$ se décompose au moyen d'une décomposition primaire en $L^{\otimes -1} = I \cap J$ où J est à support vertical V et I définit un fermé plat sur la base à fibre générique lisse ($=\mathrm{div}(s_K)$) de dimension $r-1$, on le note H. On a alors pour n assez grand la suite exacte suivante :

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I) \to H^0(X, L^{\otimes n+1}) \to H^0(H, L^{\otimes n+1}\mid_H) \to 0. \tag{28}$$

- En posant $M = \oplus_{n\geq 0} H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I)$ et en considérant le plongement canonique :

  $$H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I) \hookrightarrow \oplus_\sigma H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes K_\sigma = W_n$$

  on obtient sur W_n les éléments de volumes suivants

  1. V^n_{X,L^2}
  2. $V^n_{X,k}$ donné par 2.1 relativement à A
  3. Z^n_k donné par 2.1 relativement à M

- On note $B = \oplus_{n\geq 0} H^0(H, L^{\otimes n}\mid_H)$ et on considère l'inclusion :

  $$H^0(H, L^{\otimes n}\mid_H) \hookrightarrow \oplus_\sigma H^0(H, L^{\otimes n}\mid_H) \otimes K\sigma = \Omega_n$$

  Ω_n hérite des éléments de volumes suivants :

  1. $V^n_{H,k}$ donné par la définition 2.1 relativement a B
  2. V^n_{H,L^2} le volume L^2 obtenu par restriction des métriques.

En appliquant alors la proposition 2.2 à la suite (28) on obtient :

$$V^{n+1}_{X,k} = V^{n+1}_{H,k} \otimes Z^n_k. \tag{29}$$

On veut comparer les différents éléments de volume définis sur les termes de la suite exacte

$$0 \to W_n \to W_{n+1} \to \Omega_{n+1} \to 0$$

obtenue par tensorisation de (28). Pour cela on définit les fonctions positives g, f_X, f_H et t_X par les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} V^{n+1}_{X,L^2} & = & g(n+1) V^n_{X,L^2} \otimes V^{n+1}_{H,L^2} \\ V^n_{X,k} & = & f_X(n,k) V^n_{X,L^2} \\ V^n_{H,k} & = & f_H(n,k) V^n_{H,L^2} \\ Z^n_k & = & t_X(n,k) V^n_{X,L^2}. \end{array}$$

La relation (29) nous donne l'équation :

$$f_X(n+1,k) = \frac{t_X(n,k) f_H(n+1,k)}{g(n+1)}. \tag{30}$$

On considère les deux suites exactes de faisceaux :

$$0 \to I.J \to I \to I \otimes \mathcal{O}_X/J \to 0$$

$$0 \to I.J \to I \cap J \to \mathrm{Tor}^1(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X/J) \to 0$$

où $I \cap J = L^{\otimes -1}$.

On note dans la suite $\mathcal{T} = \mathrm{Tor}^1(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X/J)$ qui est un faisceau à support dans V. Ces deux suites nous induisent pour n assez grand les suites exactes suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I.J) &\to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I) \to \\ &\to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I \otimes \mathcal{O}_X/J) \to 0 \end{aligned} \tag{31}$$

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I.J) \to H^0(X, L^{\otimes n}) \to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes \mathcal{T}) \to 0. \tag{32}$$

Les modules $H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I \otimes \mathcal{O}_X/J)$ et $H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes \mathcal{T})$ sont de torsion, on obtient alors par additivité de la fonction χ définie dans la partie 2 appliquée aux suites exactes (31) et (32) la relation :

$$\begin{aligned} \log(t_X(n,k)) - \log(f_X(n,k)) &= \log(\# H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I \otimes \mathcal{O}_X/J)) \\ &\quad - \log(\# H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes \mathcal{T})). \end{aligned} \tag{33}$$

D'où par (30) et (33) on trouve :

$$\begin{aligned} \log(f_X(n+1,k)) \quad - \quad & \log(f_X(n,k)) = \log(f_H(n+1,k)) - \log(g(n+1)) \\ & + \log(\# H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I \otimes \mathcal{O}_X/J)) \\ & - \log(\# H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes \mathcal{T})). \end{aligned} \tag{34}$$

Dans cette équation le terme de gauche admet un développement asymptotique de la forme $\alpha n^r + o(n^r)$. En effet,

- par hypothèse de récurrence (H est plat à fibre générique lisse) on a :

$$\log(f_H(n+1,k)) = c_H(k-\mu)n^r + o(n^r) \ ;$$

- pour développer en fonction de n les deux quantités

$$\log(\# H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I \otimes \mathcal{O}_X/J)) \text{ et } \log(\# H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes \mathcal{T}))$$

  on décompose V en somme de sous-variétés connexes sans intersection contenues dans les fibres et donc de dimension $\leq r$. On applique alors le théorème de Hilbert-Samuel algébrique à ces sous-variétés pour déduire que chacune de ces deux quantités admet un développement de la forme $c'n^r + o(n^r)$;

- on a le résultat suivant :

$$\log g(n) = \eta n^r + o(n^r).$$

Pour justifier ceci on pose $g(n) = \prod_\sigma g_\sigma(n)$ où g_σ compare les volumes L^2 dans la suite exacte suivante :

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X_K, L_K^{\otimes n}) \otimes_\sigma K_\sigma \quad &\to \quad H^0(X_K, L_K^{\otimes n+1}) \otimes_\sigma K_\sigma \to \\ &\to H^0(H_K, L_K^{\otimes n+1} \mid_{H_K}) \otimes_\sigma K_\sigma \to 0. \end{aligned}$$

On a prouvé dans 3.1 que pour une place comlexe σ il existe un nombre réel η_σ tel que $\log g_\sigma(n) = \eta_\sigma n^r + o(n^r)$. Ce résultat s'étend à une place réelle car les métriques sont stables par conjugaison. Ce qui donne l'équivalent annoncé.

D'où il existe un nombre réel $\eta(k)$ tel que $\log f_X(n,k) = \eta(k)n^{r+1} + o(n^{r+1})$.

Il reste donc pour finir la preuve de 4.2 à débuter la récurrence, c'est le cas $r = 1$. Nous avons fixé une section s de $H^0(X, L)$ à fibre générique réduite. Le faisceau $L^{\otimes -1}$ faisceau d'idéaux de $\mathrm{div}(s)$ se décompose en $L^{\otimes -1} = I \cap J$ avec J à support vertical V et I définissant un fermé fini et plat sur la base à fibre générique réduite (=div(s_K)) noté H. Il s'ensuit que $H = \mathrm{Spec}\mathcal{A}$ pour une $\mathcal{O}_K-$algèbre finie et réduite $\mathcal{A}$. Avec les notations précédentes on obtient l'équation :

$$\log(f_H(n,k)) = -\chi(L^{\otimes n} \mid_H, V^n_{H,k}) + \chi(L^{\otimes n} \mid_H, V^n_{H,L^2})\ .$$

Par la définition 2.1 et le fait que le polynôme de Hilbert-Samuel algébrique de $\oplus_n L^{\otimes n} \mid_H \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ est constant, on déduit que $\chi(L^{\otimes n} \mid_H, V^n_{H,k})$ est une fonction affine. Il en est de même pour $\chi(L^{\otimes n} \mid_H, V^n_{H,L^2})$ à cause du théorème de Riemann-Roch arithmétique appliqué à $\mathcal{A}$ (et aprés réduction à un ordre d'un corps de nombres, voir [M-B] et [Sz 1]). Il s'ensuit que $\log f_H(n,k)$ est une fonction affine. Ce résultat nous permet en reprenant les mêmes étapes que la preuve générale de terminer la démonstration.

B) Cas général :

Il sera déduit du cas A. En effet il existe un entier j tel que $L^{\otimes j}$ soit très ample. En considérant une bonne section de $H^0(X, L^{\otimes j})$, en faisant la même récurrence et en utilisant la remarque 3.12 on prouve que pour tout entier p compris entre 0 et $j-1$ il existe une fonction $\eta_p(k)$ tel que $\log f_X(nj+p, k) = \eta_p(k)n^{r+1} + o(n^{r+1})$. Il reste alors pour terminer la preuve de voir que les fonctions $\eta_p(k)$ sont égales et de poser $\eta(k) = \frac{\eta_p(k)}{j^{r+1}}$. Or l'égalité des $\eta_p(k)$ peut être démontrée par la même récurrence et au moyen de la remarque 3.12 qui nous assure de l'unicité de la contribution à l'infini.

Théorème principal (boule unité sup). — *Soient $X \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ un schéma projectif plat à fibre générique lisse de dimension r et L un faisceau inversible ample muni en chaque place à l'infini d'une métrique hermitienne à courbure positive. On désigne par B_n la boule unité pour la norme sup de $H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$, alors quand n tend vers l'infini la quantité :*

$$\frac{(r+1)!}{n^{r+1}}\big(-\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(B_n))\big)$$

tend vers une limite finie appelée la self-intersection de L. On la note $(L)^{r+1}$.

Remarque. — Nous avons noté $V^n_{X,\sup}$ l'élément de volume réel de $H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes \mathbb{R}$ qui donne à la boule unité sup B_n le volume 1. Il en découle l'égalité suivante :

$$-\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(B_n)) = -\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}), V^n_{X,\sup})).$$

Preuve. — Soit k l'unique nombre réel donné par la proposition 4.2 pour lequel $\log(f_X(n,k)) = o(n^{r+1})$, on définit la self-intersection de L par la formule $(L)^{r+1} = (L_K)^r k$. On en déduit le calcul suivant :

$$\begin{aligned} -\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}), V^n_{X,\sup})) &= \chi(H^0(X, L^{\otimes n}), V^n_{X,k}) + \\ &\quad + \log(f_X(n,k) h_X(n)) \qquad (35) \\ &= k \sum_{j=0}^{n-1} P(j) + o(n^{r+1}) \qquad (36) \\ &= \frac{(L)^{r+1}}{(r+1)!} n^{r+1} + o(n^{r+1}). \qquad (37) \end{aligned}$$

Le théorème suivant est une version équivalente du théorème précédent portant sur la boule unité L^2.

Théorème principal (boule unité L^2). — *Avec les mêmes conditions et notations qu'au théorème précédent, on a la limite suivante quand n tend vers l'infini :*

$$\frac{(r+1)!}{n^{r+1}} \big(-\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(C_n)) \big) \to (L)^{r+1}.$$

où C_n est la boule unité pour la norme L^2 de $H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Preuve. — C'est un corollaire directe de la comparaison entre volume sup et volume L^2 dans 4.1.

Nous déduisons du théorème principal (boule unité sup) le critère suivant pour l'existence de sections de norme sup plus petite que 1 en chaque place.

Corollaire. — *Si $(L)^{r+1} > 0$ alors $H^0_{Ar}(X, L^{\otimes n}) \neq 0$ pour n assez grand.*

Preuve. — C'est une application simple du premier théorème de Minkowski.

Remarques 4.3. —

1. L'énoncé du théorème de Hilbert-Samuel algébrique est le suivant : *Soient A une algèbre graduée de type fini sur un anneau artinien et M un $A-$module gradué de type fini $M = \oplus_{n \geq 0} M_n$. Il existe un polynôme numérique P_M appelé polynôme de Hilbert-Samuel de M, vérifiant $P_M(n) = \mathrm{longueur}(M_n)$ pour n assez grand.* Bien que nous nous soyons permis d'appeler le théorème principal théorème de Hilbert-Samuel « arithmétique » , l'analogie avec la situation algébrique s'arrête au terme dominant qui s'est avéré jusqu'à maintenant suffisant pour les applications (voir corollaire précédent).

2. S. Zhang dans [Zh] généralise le théorème de Hilbert-Samuel « arithmétique » à un schéma projectif et plat sans supposer la fibre générique lisse en utilisant une désingularisation de cette fibre générique.

3. La self-intersection définie dans le théorème principal coïncide avec celle obtenue à partir des théories d'intersection d'Elkik dans [El 2] et de Gillet et Soulé dans [G-S 2] et [G-S 3]. Elle coïncide aussi dans le cas d'une surface arithmétique avec la self-intersection d'Arakelov (voir section 5).

5 Comparaison avec les théories d'intersection

5.1 Cas d'une surface arithmétique

On suppose que X est une surface arithmétique (donc $r = 1$) et que L est muni en chaque place σ de Φ d'une métrique permise (voir [M-B] et [Fa 2]). Nous pouvons alors calculer la self-intersection de L au sens d'Arakelov qu'on note : $(L, L)_{Ar}$. on se propose de montrer que la self-intersection d'Arakelov coïncide avec celle définie dans le théorème principal.

Pour n assez grand on note V^n_{Falt} l'élément de volume de Faltings de W_n défini dans [Fa 2] et [M-B]. Le théorème de Riemann-Roch de Faltings prouvé dans [Fa 2] donne :

$$- \log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}), V^n_{Falt})) = \frac{1}{2}(L, L)_{Ar}\ n^2 + O(n). \tag{38}$$

On compare le volume de Faltings au volume L^2 par la fonction positive $u(n)$ définie par l'équation :

$$V^n_{Falt} = u(n) V^n_{L^2}.$$

Faltings a prouvé dans [Fa 2] (voir aussi [El 1]) que $-\log(u(n)) \leq o(n^2)$ ce qui donne :

Lemme 5.1 *On a l'inégalité : $(L, L)_{Ar} \leq (L, L)$.*

Preuve. —

$$\begin{aligned}
- \log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n})\ ,\ V^n_{Falt})) &= \frac{1}{2}(L, L)_{Ar}\ n^2 + o(n^2) && (39)\\
&= \ - \log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}), V^n_{L^2})) - \log(u(n)) && (40)\\
&= \ \frac{1}{2}(L, L)n^2 + o(n^2) - \log(u(n)) && (41)\\
&\leq \ \frac{1}{2}(L, L)n^2 + o(n^2) && (42)
\end{aligned}$$

où pour passer de (40) à (41), nous avons utilisé la version L^2 du théorème principal. Le lemme se déduit alors de ces inégalités.

Les méthodes que nous avons développées dans les sections précédentes nous permettent de prouver la proposition suivante :

Proposition 5.2 *On a l'égalité : $(L, L)_{Ar} = (L, L)$.*

Preuve. — Montrer l'égalité des deux self-intersections revient à prouver que $\log(u(n)) = o(n^2)$. On peut toujours trouver un diviseur horizontal réduit H, un diviseur vertical à distance finie V, un réel λ et un entier m tels que $L^{\otimes m} = \mathcal{O}_X(H + V + \lambda[X_\infty])$ où l'égalité est une isométrie de faisceaux avec métriques permises. En utilisant les relations évidentes suivantes :

$$(L^{\otimes m})^2 = m^2(L)^2 \quad \text{et} \quad (L^{\otimes m})^2_{Ar} = m^2(L)^2_{Ar}$$
$$(L(\lambda[X_\infty]))^2 = (L)^2 + 2\lambda \deg(L_K)$$
$$(L(\lambda[X_\infty]))^2_{Ar} = (L)^2_{Ar} + 2\lambda \deg(L_K)$$

on peut supposer que $L = \mathcal{O}_X(H+V)$. On note $k = (L,L)_{Ar}/\deg(L)$ et V_k^n l'élément de volume défini dans 2.1 comme au déduit de la section 4. On compare V_k^n au volume de Faltings V_{Falt}^n par la fonction positive $v(n)$ vérifiant : $V_{Falt}^n = v(n)V_k^n$. La relation (38) et la définition 2.1 nous montrent que $\log(v(n)) = O(n)$. On ramène ainsi la démonstration à prouver que $\log(f(n,k)) = o(n^2)$ où $f(n,k)$ compare les volumes V_k^n et $V_{L^2}^n$ comme dans la section 4. On désigne par I et J les faisceaux d'ideaux respectifs de H et V. Les suites exactes que nous avons introduit dans la preuve de la proposition 4.2 deviennent (X est régulier) pour n assez grand :

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I) \to H^0(X, L^{\otimes n+1}) \to H^0(H, L_{|H}^{\otimes n+1}) \to 0$$

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n}) \to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I) \to H^0(V, L^{\otimes n+1} \otimes I_{|V}) \to 0$$

ce qui nous permet de déduire avec les mêmes notations que celles de la section précédente (et en particulier de la preuve du 4.2) la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} \log(f_X(n+1,k)) - \log(f_X(n,k)) &= \log(f_H(n+1,k)) - \log(g(n+1)) + \\ &\quad + \log(\# H^0(V, L^{\otimes n+1} \otimes I_{|V})). \qquad (43) \end{aligned}$$

La proposition 3.1 nous donne :

$$\frac{1}{P(n)} \log(g(n)) \to -\Sigma_\sigma \varepsilon_\sigma \int_{X_\sigma} \log(|s|)\mu_\sigma, \qquad n \to +\infty$$

où $P(n)$ est le polynôme de Hilbert-Samuel algébrique de L_σ et μ_σ est la métrique d'Arakelov de X_σ qui coïncide avec $ic(L_\sigma)/\deg(L)$ par définition de la métrique permise. Or pour tout σ on a $\int_{X_\sigma} \log(|s|)\mu_\sigma = 0$. En effet, il suffit de considérer le cas où H_K est un point P, alors $|s(Q)|_\sigma = G_\sigma(P_\sigma, Q)$ pour tout point Q de X_σ où les fonctions G_σ sont les fonctions de Green définies dans [M-B], l'intégrale est alors nulle par définition. D'où $\log(g(n)) = o(n)$.

On rappelle que $V_{H,\sup}^n$ désigne l'élément de volume induit sur $H^0(X, L_{|H}^{\otimes n}) \otimes \mathbb{R}$ par restriction des métriques de L aux points qui forment le diviseur de H_σ et que $V_{H,k}^n$ est l'élément de volume défini dans 2.1. Il découle alors :

$$\log(f_H(n,k)) = -\chi(H^0(H, L_{|H}^{\otimes n}), V_{H,k}^n) + \chi(H^0(H, L_{|H}^{\otimes n}), V_{H,\sup}^n).$$

Par la définition 2.1, on a :

$$\chi(H^0(H, L_{|H}^{\otimes n}), V_{H,k}^n) = (L,L)_{Ar}\ n + \deg(L_K)\chi(\mathcal{O}_K).$$

Par le théorème de Riemann-Roch arithmétique appliqué à H (et après réduction à un ordre d'un corps de nombres voir [M-B] et [Sz 1]), on obtient :

$$\chi(H^0(H, L_{|H}^{\otimes n}), V_{H,\sup}^n) = (L, \mathcal{O}_X(H))_{Ar}\ n + O(1).$$

Comme $H^0(V, L^{\otimes n+1} \otimes I_{|V})$ est de torsion, on tire :

$$\log(\# H^0(V, L^{\otimes n+1} \otimes I_{|V})) = (L, \mathcal{O}_X(V))_{Ar}\ n + O(1).$$

La relation (43) et les développements précédents nous permettent de conclure que

$$\log(f_X(n+1,k)) - \log(f_X(n,k)) = o(n)$$

et par suite que $\log(f_X(n,k)) = o(n^2)$, ce qui termine la preuve.

Exemple. — La proposition 5.2 nous permet de donner des exemples pour lesquels nous sommes capables de calculer la self-intersection. Considérons le cas d'une courbe elliptique semi-stable. Soient E une section de X et $L = \mathcal{O}_X(E)$ muni de ses métriques permises canoniques. L. Szpiro a montré dans [Sz 2] que $(L,L) = -\log(|\Delta_{\min}|)/12$ où $\Delta_{\min}$ est le discriminant minimal de X et $|\Delta_{\min}|$ sa norme. Ce qui nous montre que quand X n'a pas bonne réduction partout $(L,L) < 0$. Remarquons que bien que le critère d'existence de sections effectives que nous avons donné ne s'applique pas, L possède une section effective au sens d'Arakelov puisqu'il est donné comme faisceau associé à une section.

5.2 Cas général

On considère de nouveau le cas général et on se propose de prouver que la self-intersection de L définie dans le théorème principal coïncide avec celle obtenue à partir des théories d'intersection de [El 2] ou [G-S 3]. Plaçons nous dans la situation de [El 2] c'est à dire $X \to$Spec $\mathcal{O}_K$ projectif, Cohen-Macaulay à fibre générique lisse. Soit L un faisceau inversible ample muni en chaque place à l'infini d'une métrique hermitienne à courbure positive . On note $(L)^{r+1}_{El}$ la self-intersection de L définie dans [El 2] et $(L)^{r+1}$ celle obtenue à partir du théorème principal.

Proposition 5.3 *On a l'égalité :* $(L)^{r+1} = (L)^{r+1}_{El}$.

Preuve. — La preuve consiste en une récurrence sur la dimension de la fibre générique r. Dans la suite nous esquissons le passage de $r-1$ à r, l'initialisation de la récurrence étant identique à 5.2. Quitte à remplacer L par un multiple, on peut choisir une section s de L telle que s_K définisse un diviseur lisse et telle que s soit $\mathcal{O}_K$ régulière aux points des fibres singulières de $X \to$ Spec $\mathcal{O}_K$. On a alors $L = \mathcal{O}_X(V+H)$ où H est un diviseur de Cartier plat sur Spec $\mathcal{O}_K$ et V vertical constitué de fibres lisses. On pose alors $k = (L)^{r+1}_{El}/(L_K)^r$. Montrer l'égalité des deux self-intersections revient à voir que $\log(f_X(n,k)) = o(n^{r+1})$. La relation de récurrence (34) devient dans notre cas :

$$\begin{aligned}\log(f_X(n+1,k)) - \log(f_X(n,k)) \quad &= \quad \log(f_H(n+1,k)) - \log(g(n+1)) + \\ &\quad + \log(\#H^0(V, L^{\otimes n+1} \otimes I_{|V})). \qquad (44)\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 3.1, l'hypothèse de récurrence et la relation I.1.1 d) de [El 2] entre $(L,\dots,L,\mathcal{O}_X(H))$ et $(L_{|H})^r$, on obtient que :

$$\log(f_X(n+1,k)) - \log(f_X(n,k)) = o(n^r)$$

ce qui termine la preuve.

Bibliographie

[B-L] J.-M. Bismut ; G. Lebeau, *Complex immersion and Quillen metrics*, Publ. Math. Inst. hautes Etud. Sci. 74, (1991), p. 1-298.

[B-V] J.-M. Bismut ; E. Vasserot, *Comportement asymptotique de la torsion analytique associée aux puissances d'un fibré en droites*, C. R. Acad. Sci. Paris, 307, (1988), p. 799-781.

[B 1] T. Bouche, *Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif*, Ann. Ins. Fourier, 40, fasc. 1, (1990), p. 117-130.

[B 2] T. Bouche, *Asymptotic results for hermitian line bundles : the heat kernel approch*, Prépub. Inst. Fourier, (1993).

[B-G] L. Boutet de Monvel ; V. Guillemin, *The spectral Theory of Toeplitz operators*, Annals of Math. Studies 99, Princeton University Press 1981.

[De] J.-P. Demailly, *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 35, (1985), p. 189-229.

[El 1] R. Elkik, *Fonctions de Green, volumes de Faltings application aux surfaces arithmétiques* dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque 127, (1985), p. 89-112.

[El 2] R. Elkik, *Métriques sur les fibrés d'intersection*, Duke Math. J. 61 No. 1, (1990), p. 303-328.

[Fa 1] G. Faltings, *Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem*, Annals of Mathematics studies 127, (1992), Princeton University press.

[Fa 2] G. Faltings, *Calculus on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. 119, (1984), p. 387-424.

[G-S 1] H. Gillet ; C. Soulé, *An arithmetic Riemann-Roch Theorem*, Inventiones Math. 110, (1992), p. 473-543.

[G-S 2] H. Gillet ; C. Soulé, *Arithmetic intersection theory*, Publ. Math. IHES 72, (1990), p. 94-174.

[G-S 3] H. Gillet ; C. Soulé, *Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metrics, I, II*, Ann. Math. 131, (1990), p. 163-203 et 205-238.

[G-S 4] H. Gillet ; C. Soulé, *Amplitude arithmétique*, C. R. Acad. Sci. Paris 307, (1988), p. 887-890.

[L-R] C. F. Lau ; R. Rumely, *Arithmetic capacities on $\mathbb{P}^N$*, à paraitre dans Math. Zeit.

[L-R-V] C. F. Lau ; R. Rumely ; R. Varley, *Existence of sectional capacity*, University of Georgia, Mathematics preprint series, N. 25, vol I, (1993)

[Ma] L. Manivel, *Un théorème de prolongement L^2 de sections holomorphes d'un fibré hermitien*, Math. Z. 212,(1993), p. 107-122

[M-B] L. Moret-Bailly, *Métriques permises* dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque 127, (1985), p. 29-87.

[Oh] T. Ohsawa, *On the extension of L^2 holomorphic functions II*, Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ., 24, (1988), p. 265-275.

[Ph] P. Philippon, *Sur des hauteurs alternatives.I*, Math. Ann. 289, (1991), p. 255-283.

[Sk] H. Skoda, *Remarques à propos des théorèmes d'annulation pour les fibrés semi-positifs*, dans Séminaire P. Lelong et H. Skoda (Analyse) 1978-1979, p. 252-258, Lectures Notes in Math. 822 Springer-Verlag.

[Sz 1] L. Szpiro, *Degrés, intersections, hauteurs* dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque 127 (1985), p. 11-28.

[Sz 2] L. Szpiro, *Sur les propriétés numériques du dualisant-relatif d'une surface arithmétique* dans The Grothendieck Festschrift, vol. 3, (1990) Basel Boston Berlin Birkhäuser, p. 229-246

[T] G. Tian, *On a set of polarized Kahler metrics on algebraic manifolds*, J. Differential Geometry 32, (1990), p. 99-130

[Ul] E. Ullmo, *Points entiers, points de torsion et amplitude arithmétique*, à paraitre dans American Journal of Math..

[Vo] P. Vojta, *Siegel's theorem in the compact case*, Ann. of Math. 133, (1991), p. 509-548.

[Zh] S. Zhang, *Positive Line Bundles on Arithmetic Varieties*, (1992), à paraitre dans The Journal of AMS.

(7 décembre 1999)